Kombinatorik

Kurzskriptum zur Vorlesung
Universität Flensburg
Stand: 15.05.2000

Prof. Dr. Alfred Schreiber

1. Grundlegende Zählprinzipien

1.1. Kombinatorik: Kunst des Zählens

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit endlichen (im allgemeinen strukturierten) Mengen. Ein klassischer Zweig ist die Abzählungstheorie, die hier auch im Vordergrund steht. Typischerweise sucht man eine explizite oder zumindest rekursive Darstellung für die Anzahl der Elemente einer Menge.

Beispiele:

> Wie viele Lottoziehungen "6 aus 49" sind möglich? (Allgemeiner: Wie viele k-elementige Teilmengen hat eine Menge von n Elementen?)
> Wie viele Klasseneinteilungen besitzt eine n-elementige Menge?
> Auf wie viele Arten lässt sich eine bestimmte gegebene Karte (Graph) färben?

Kombinatorische Fragestellungen sind für den Mathematik-Unterricht unter anderem aus folgenden Gründen interessant:
Sie sind meist direkt zugänglich (verständlich), auf vielfältige Weise interpretierbar und lösbar, haben herausfordernden Charakter und nicht selten überraschende Ergebnisse. (Letzteres gilt besonders für Existenzprobleme, etwa: Werden 1600 Kokosnüsse an 100 Affen verteilt, so gibt es wenigstens 4 Affen, die dieselbe Anzahl erhalten.)
Rezepthaftes Problemlösen spielt nur eine untergeordnete Rolle. Das macht das Gebiet reizvoll, gelegentlich aber auch anspruchsvoll.

1.2. Voraussetzungen, Bezeichnungsweisen

Voraussetzungen

Es wird aus dem Grundstudium vorausgesetzt: Abbildungsbegriff, Rechnen mit Permutationen (als bijektive Abbildungen), induktives Beweisen. (Für Kapitel 6 sind Grundkenntnisse über Gruppen nützlich.)

Bezeichnungsweisen

Zahlenmengen wie üblich:

> $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$: Menge der natürlichen Zahlen
> $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$: Menge der ganzen, rationalen, reellen, komplexen Zahlen
> $\mathbb{N}_m := \{1, ..., m\}$, $m \geq 1$ ganz

Operationen mit Mengen:

> $\{x : \in(x)\}$: Menge aller Dinge x mit Eigenschaft $\in(x)$
> $|A|$: Anzahl der Elemente der (endlichen) Menge A, $|\emptyset| = 0$
> $A \cup B$: Vereinigung der Mengen A und B
> $A \cap B$: Durchschnitt der Mengen A und B
> A, B heißen disjunkt (elementfremd), wenn $A \cap B = \emptyset$
> $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$: Differenz der Mengen A und B
> $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$: Boolesche Summe der Mengen A und B
> $A^c = M \setminus A$: Komplement von A in einer Grundmenge M
> $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$: Mengenprodukt (kartesisches Produkt)
> $\bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup ...$: große Vereinigung
> $\bigcap_i A_i = A_1 \cap A_2 \cap ...$: großer Durchschnitt

Rundungsfunktionen:

> Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann wird definiert:
> $\lceil x \rceil$:= kleinste ganze Zahl $\geq x$ (aufrunden; Ceiling-Funktion)

$\lfloor x \rfloor$:= größte ganze Zahl $\leq x$ (abrunden; Floor-Funktion)

1.3. Summenregel

Von den drei elementaren Zählprinzipien der Kombinatorik ist die Summenregel die einfachste:

Für disjunkte Mengen A, B gilt: $|A \cup B| = |A| + |B|$

Die Summenregel gilt auch für endlich viele paarweise disjunkte Mengen.
Vereinbarung: Mengen, deren Anzahl zu bestimmen ist, werden stets als endlich vorausgesetzt.

Die Summenregel wird häufig in der subtraktiven Form $|A| = |A \cup B| - |B|$ benutzt (erst eine größere Menge abzählen, dann die Anzahl einer Teilmenge subtrahieren) oder in der Form einer Zerlegung: Menge M ist abzuzählen; suche geeignete disjunkte Teilmengen A und B mit $M = A \cup B$.

Beispiele hierzu in der Vorlesung:
1. Höchstzahl von Schnittpunkten [subtraktive Form]
2. Anzahl $a(m, n)$ kürzester Wege zwischen den Gitterpunkten (0,0) und (m, n) [Zerlegung in zwei kleinere Probleme und zugehörige rekursive Gleichung: $a(m, n) = a(m-1, n) + a(m, n-1)$, wobei $a(m, 0) = a(0, n) = 1$]
3. Figurenzahlen [durch Zerlegung gewonnene rekursive Gleichung für die Größe $F_r(n)$ des n-ten r-Ecks: $F_r(n) = F_r(n-1) + (r-2)(n-1) + 1$]

Es wird am Beispiel 3 exemplarisch vorgeführt, wie man aus einer rekursiven Darstellung eine explizite Formel gewinnen kann, hier:

$$F_r(n) = n + (r-2)\,\frac{n(n-1)}{2}$$

1.4. Produktregel

Die Produktregel läßt sich (für zwei Mengen A, B) anschaulich deuten als Bestimmung des Flächeninhalts eines Rechtecks mit ganzzahligen Seitenlängen.

Für beliebige Mengen A, B gilt: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Die Produktregel gilt auch für beliebige endliche Mengenprodukte.

Zwei Anwendungsbeispiele:

1. Anzahl $t(n)$ der Teiler einer ganzen Zahl $n \geq 1$ (unter Benutzung der Primfaktorzerlegung von n).

Besitzt n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$, *so gilt:* $t(n) = (a_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_s + 1)$.

Die folgende *Mathematica*-Funktion verwendet einen Modul, der dieses Resultat sinngemäß nachvollzieht.

```
anzahlTeiler[n_] := Module[{a, s},
   a = FactorInteger[n]; s = Length[a];
    Return[Product[a[[i,2]] + 1, {i, 1, s}]]]

anzahlTeiler[600]
```

```
24
```

2. Anzahl der Teilmengen einer m-elementigen Menge ($= 2^m$).
Für jedes Element der Menge M wird eine 1 notiert, wenn es zu einer bestimmten Teilmenge X gehört, sonst 0. Die so entstehende 0-1-Folge beschreibt die Teilmenge X. Mit der Produktregel ergibt sich dann die behauptete Anzahl als Anzahl aller 0-1-Folgen der Länge m.

1.5. Zuordnungsregel (Gleichheitsregel)

Die Zuordnungsregel (auch Gleichheitsregel genannt) bringt zum Ausdruck, dass die Natur der zu zählenden Objekte für die Anzahlbestimmung unerheblich ist.
Beispiel 2 zur Produktregel (Abschn. 1.4) enthält bereits eine typische Anwendung dieses Gedankens: Statt der Teilmengen einer gegebenen Menge zählt man 0-1-Folgen, welche die Teilmengen eindeutig kennzeichnen, d.h. ihnen umkehrbar eindeutig (bijektiv) zugeordnet werden können.
Grundlage ist folgender Satz:

Zwei Mengen A, B sind anzahlgleich, d.h. $|A| = |B|$, *genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung* $f : A \to B$ *gibt.*

In jedem Einzelfall ist eine geeignete Zuordnung f anzugeben und zu beweisen, dass f bijektiv ist.
Der Nutzen dieser wichtigen Regel wird dann ersichtlich, wenn die eine der beteiligten Mengen leichter abzuzählen ist als die andere. In Kapitel 2 wird davon reichlicher Gebrauch gemacht.

Als weiteres Anwendungsbeispiel dient die Behauptung:

Eine nichtleere Menge besitzt genausoviele Teilmengen gerader Anzahl wie Teilmengen ungerader Anzahl.

Beweis: Seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U}$ die Mengen der geradanzahligen bzw. ungeradanzahligen Teilmengen von $M(\neq \emptyset)$. Für beliebiges $a \in M$ wird $f : \mathfrak{G} \to \mathfrak{U}$ definiert durch $f(X) = X + \{a\}$. Man zeigt: f ist bijektiv, es gilt somit $|\mathfrak{G}| = |\mathfrak{U}|$. □

2. Permutationen und Kombinationen

2.1. Permutationen ohne und mit Wiederholung

Sei A eine beliebige endliche Menge: $|A| = n \geq 0$, häufig ist es (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) zweckmäßig, sich unter A die Menge der "Ziffern" 1, ..., n vorzustellen.

Eine k-Permutation von A ist eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_k$ von Elementen von A. Die Zahl k heißt Länge der Permutation.

Besteht die Folge $p = a_1\, a_2 \ldots a_k$ aus lauter verschiedenen Elementen, so heißt p Permutation *ohne Wiederholung*, sonst Permutation *mit Wiederholung*. Die Kommas zwischen den Folgengliedern werden gelegentlich weggelassen. In dieser Schreibweise heißt p auch *Wort der Länge k über dem Alphabet A*. Für $k = 0$ ist p die leere Folge (bzw. das leere Wort). Auch die Tupel-Notation ist gebräuchlich: $p = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Wir betrachten die zugehörigen Anzahlfunktionen:
$P(n, k)$ = Anzahl der k-Permutationen (von n Elementen) ohne Wiederholung
$P^*(n, k)$ = Anzahl der k-Permutationen (von n Elementen) mit Wiederholung

2.1.1. Satz

1. $P(n, k) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ für k mit $0 \leq k \leq n$

2. $P^*(n, k) = n^k$ für beliebige $n \geq 1, k \geq 0$

Beweis:
1. Das Element a_1 kann auf n Weisen gewählt werden, danach a_2 noch auf $n-1$ Weisen usw. Die Behauptung ergibt sich mit Hilfe der Produktregel.
2. Für jedes Element gibt es n Wahlmöglichkeiten. □

Sonderfall $k = 0$: Es gibt nur die leere Folge, mithin jeweils genau eine Permutation ohne bzw. mit Wiederholung. Daher: $P(n, 0) = P^*(n, 0) = 1$.

Sonderfall $k = n$: Eine n-Permutation ohne Wiederholung kann hier gedeutet werden als Anordnung von n Dingen. Statt "n-Permutation" sagt man kürzer "Permutation". Ferner notiert man $P(n, n) = :n!$ (gelesen: n Fakultät).
Die Folge der Fakultäten wächst rasch:

```
TableForm[Table[n!, {n, 0, 20}]]
```

```
1
1
2
6
24
120
720
5040
40 320
362 880
3 628 800
39 916 800
479 001 600
6 227 020 800
87 178 291 200
1 307 674 368 000
20 922 789 888 000
355 687 428 096 000
6 402 373 705 728 000
121 645 100 408 832 000
2 432 902 008 176 640 000
```

Die Anzahl der k-Permutationen von n Elementen ohne Wiederholung lässt sich mit Fakultäten wie folgt schreiben: $P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Natürlich ist dies für das praktische Rechnen ungünstig.

Mathematica-Funktion für $P(n, k)$:

```
perm[n_, k_] := Product[j,{j, n, n - k + 1, -1}];
perm[7, 4]
```

```
840
```

2.2. Permutationen mit vorgeschriebenen Wiederholungen

Bei diesem Typ von Permutationen wird für jedes der beteiligten Elemente a_i die Häufigkeit $r_i \geq 0$ vorgegeben, in der es in der Folge auftritt. Für eine k-Permutation gilt dann $r_1 + ... + r_n = k$. Wir legen eine nichtleere Menge $A = \{a_1, ..., a_n\}$ zugrunde und bezeichnen mit $P(r_1, ..., r_n; k)$ die Anzahl aller k-Permutationen von A, in denen das Element a_i genau r_i-mal auftritt ($i = 1, ..., n$).
Es gilt die

2.2.1. Formel

$$P(r_1, ..., r_n; k) = \frac{k!}{r_1! \cdot ... \cdot r_n!}$$

Beweisskizze (anhand eines Beispiels):
Aus den $n = 5$ Buchstaben A, B, E, L, N sollen 9-Permutationen mit den jeweiligen vorgeschriebenen Wiederholungshäufigkeiten 3, 1, 1, 2, 2 gebildet werden. Beispiel einer solchen Permutation ist das Wort ANNABELLA.
Insgesamt gibt es 9! = 362880 Anordnungen verschiedener (hier: durch Striche unterscheidbar gemachter) Elemente A'N'N"A"BEL'L"A'". Werden nun die 3 ($= r_1$) Varianten A', A", A'" identifiziert, so fallen sämtliche Permutationen (zu einer einzigen) zusammen, die sich nur in der Anordnung der A', A", A'" unterscheiden. Dadurch schrumpft die Menge aller Permutationen auf ein 6-tel ihres Umfangs (6 = 3!). Verfährt man in analoger Weise mit den Buchstaben L und N, so bleiben am Ende $\frac{9!}{3!\ 2!\ 2!} = 15\,120$ Permutationen übrig. □

Bemerkung. Die Permutationen von n Elementen ohne Wiederholung ist in dem Spezialfall $r_1 = .. = r_n = 1$, $k = n$ enthalten. Formel 2.2.1 liefert: $P(1, ... 1; n) = n!$

Mathematica-Funktion für $P(r_1, ..., r_n; k)$:

Die Folge der Wiederholungshäufigkeiten wird der Funktion permWdh als Liste r (d.h. als n-Tupel bzw. geordnete Menge) übergeben; die Länge n der Liste ist lokal im definierenden Modul:

```
permWdh[r_, k_] := Module[{n},
    n = Length[r];
    Quotient[k!, Product[r[[i]]!, {i, 1, n}]]
    ]
permWdh[{3, 2, 2}, 9]
```

```
15 120
```

2.3. Kombinationen ohne und mit Wiederholung

Kombinationen sind Folgen von Elementen, bei denen es auf die Reihenfolge nicht ankommt. Sie lassen sich am *Urnenmodell* veranschaulichen: Beim Zahlenlotto "6 aus 49" zieht man 6 Kugeln aus einer Urne mit 49 numerierten Kugeln. Eine gezogene Kugel wird nicht wieder zurückgelegt, die Ziehung enthält demnach keine Wiederholungen. Da es auf die Reihenfolge nicht ankommt, werden am Ende die 6 Kugeln in der aufsteigenden Folge ihrer Nummern angegeben. Dies ist ein Muster für eine *Kombination ohne Wiederholung*. Würde man alle Kugeln nach ihrer Ziehung wieder zurücklegen, so wäre das Ergebnis eine *Kombination mit Wiederholung*.

Sei $A = \{a_1, ..., a_n\}$ eine beliebige endliche Menge: $|A| = n \geq 0$ und $a_{j_1}, ..., a_{j_k}$ eine Folge der Länge k irgendwelcher Elemente aus A.

$a_{j_1}, ..., a_{j_k}$ heißt k-Kombination (von n Elementen) ohne bzw. mit Wiederholung, wenn $j_1 < ... < j_k$ bzw. $j_1 \leq ... \leq j_k$ gilt. Die zugehörigen Anzahlfunktionen werden mit $C(n, k)$ bzw. $C^*(n, k)$ bezeichnet.

Beispiel. $A = \{1, 2, 3\}$. Dann lauten alle 2-Kombinationen mit Wiederholung: 11, 12, 22, 13, 33, 23. Es gilt also $C^*(3, 2) = 6$.

2.3.1. Satz

1. $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, *wobei* $0 \leq k \leq n$;

2. $C^*(n, k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$, *wobei* $n \geq 1,\ k \geq 0$.

Beweis:
Man zählt Kombinationen dadurch ab, dass man sie als Permutationen mit vorgeschriebenen Wiederholungen darstellt und die Gleichheitsregel anwendet.

1. Ist $n = 0$, so auch $k = 0$. In diesem Fall gibt es genau eine 0-Kombination (leere Folge), d.h. $C(0, 0) = 1 = \binom{0}{0}$. Sei nun $n \geq 1$ angenommen. Eine k-Kombination $a_{j_1}, ..., a_{j_k}$ ohne Wiederholung lässt sich eindeutig als 0-1-Folge $f_1 ... f_n$ codieren; man setzt dazu $f_i = 1$, falls i

eines der $j_1, \ldots, j_k$ ist, andernfalls $f_i = 0$. Jede so definierte Folge enthält genau k Einsen und $n - k$ Nullen. Nach der Gleichheitregel und Formel 2.2.1 ergibt sich $C(n, k) = P(k, n-k; n)$ und somit die Behauptung.

2. Für $k = 0$ gibt es genau eine 0-Kombination mit Wiederholung (leere Folge), und es gilt $C^*(n-1, 0) = 1 = \binom{n-1}{0}$. Sei nun $k \geq 1$ angenommen. Eine k-Kombination mit Wiederholung wird in eindeutiger Weise als 0-1-Folge der Länge $n + k - 1$ codiert: Für jedes Vorkommen eines Elements wird eine 1 hingeschrieben; zwischen die 1-Blöcke (die auch leer sein können) wird eine 0 geschrieben. Zum Beispiel bezeichnet (im Fall $n = 7$, $k = 6$) das Wort 001110100110 die folgende 6-Kombination von 7 Elementen mit Wiederholung: $a_3\, a_3\, a_3\, a_4\, a_6\, a_6$. Umgekehrt wird z.B. $a_2\, a_4\, a_4\, a_7$ als 0100110001 codiert. Allgemein entsteht auf diese Weise eine Folge aus $n + k - 1$ Elementen, darunter k Einsen und $n - 1$ Nullen. Die Gleichheitsregel und Formel 2.2.1 liefern dann $C^*(n, k) = P(k, n-1; n+k-1)$ und damit die Behauptung. □

Die in Abschnitt 1.3 als Beispiel Nr. 2 betrachtete Anzahl $a(m, n)$ kürzester Wege zwischen den Gitterpunkten (0,0) und (m, n) lässt sich wie folgt explizit darstellen:

$$a(m, n) = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!\, n!}$$

Das ergibt sich aus dem Vergleich der für $a(m, n)$ gültigen Rekursion. Es ist auch direkt einzusehen, wenn man einen beliebigen kürzesten Weg als eine 0-1-Folge der Länge $m + n$ codiert, in der m Nullen für die eine der beiden wählbaren Richtungen und n Einsen für die andere Richtung vorkommen.

Zur Berechnung der Binomialkoeffizienten "n über k" hält *Mathematica* die eingebaute Funktion Binomial[n, k] bereit. Es ist aufgrund von Satz 2.3.1 also nicht nötig, für die Anzahlfunktionen C und C^* eigene Module zu definieren. Dennoch verdient der folgende Algorithmus zur iterativen Berechnung von $C(n, k)$ (hier komb[n, k] genannt) ein gewisses Interesse:

```
komb[n_, k_] := Module[{b = 1},
   Do[b = Quotient[b*(n - i + 1), i],{i, 1, k}]; Return[b]]
```

Damit lässt sich das erste Dutzend Zeilen des Pascalschen Dreiecks erzeugen:

```
TableForm[Table[komb[n, k], {n, 0, 11}, {k, 0, n}]]
```

1											
1	1										
1	2	1									
1	3	3	1								
1	4	6	4	1							
1	5	10	10	5	1						
1	6	15	20	15	6	1					
1	7	21	35	35	21	7	1				
1	8	28	56	70	56	28	8	1			
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

3. Zyklen

3.1. Permutationen als Abbildungen

Eine Permutation p von $\mathbb{N}_n$ lässt sich als bijektive Selbstabbildung von $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$ auffassen. Bezeichnet $j_k = p(k)$, $k = 1, \ldots, n$, so schreibt man p häufig auch in Form einer $(2, n)$-Matrix bzw. 2-reihigen Tabelle:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

Die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ wird mit $\boldsymbol{S}_n$ bezeichnet. Je zwei Elemente p, q von $\boldsymbol{S}_n$ lassen sich verketten (d.h. als Abbildungen hintereinander ausführen); das Verkettungsprodukt $p \circ q$, kürzer auch Produkt genannt und pq geschrieben, ist dabei definiert durch: $p\, q(k) = p(q(k))$.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Das s-fache Produkt von p mit sich selbst (s-te Iterierte: $p \underbrace{p \ldots p}_{s-\text{mal}}$) wird als Potenz p^s geschrieben. Die identische Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ wird mit e abgekürzt. Unter der Ordnung von p versteht man die kleinste positive ganze Zahl s, für die $p^s = e$ gilt. Sie wird mit ord(p) bezeichnet.
Als bijektive Abbildung besitzt eine Permutation $p \in \boldsymbol{S}_n$ eine eindeutig bestimmte Umkehrung $p^{-1} \in \boldsymbol{S}_n$. Der folgende Satz fasst die

Grundtatsachen zusammen:

3.1.1. Satz

1. $(S_n, \circ)$ ist eine Gruppe, d.h. für alle $p, q \in S_n$ ist wieder $p\,q \in S_n$, und es gilt: $p\,p^{-1} = p^{-1}\,p = e$ sowie $pe = ep = p$.

2. Für $p, q \in S_n$ gilt: $(p\,q)^{-1} = q^{-1}\,p^{-1}$.

3. Ist $n \geq 3$, so ist S_n nicht-kommutativ.

4. Die Ordnung (Anzahl der Elemente) von S_n ist n!

Beweis: Siehe Grundstudium; zu 3. vgl. obiges Beispiel in $\boldsymbol{S}_3$; zu 4. vgl. 2.1.1. □

3.2. Zerlegung in Zyklen

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.1 definieren wir zu gegebener Permutation p auf $A = \mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$ eine Relation $\sim$ durch

$a \sim b$ *genau dann, wenn* $b = p^s(a)$ *für ein geeignetes* $s \geq 0$.

Man kann zeigen (Beweis in den Übungen):

3.2.1. Satz
$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf A, d.h. es gilt für alle $a, b, c \in A$:
$a \sim a$,
$a \sim b \Longrightarrow b \sim a$,
$a \sim b,\ b \sim c \Longrightarrow a \sim c$.

Anschaulich gesprochen ist a äquivalent zu b (im Sinne der Definition), wenn a dadurch in b überführt werden kann, dass man p geeignet oft anwendet: $a, p(a), p(p(a))$, usw. "Geeignet oft" kann auch "0-mal" bedeuten, nämlich in dem speziellen Fall $a = b : b = p^0(a)$.

A zerfällt bzgl. $\sim$ in endlich viele paarweise disjunkte Äquivalenzklassen; sie heißen *Bahnen* (oder *Orbits*) von p. Wir studieren den Sachverhalt am Beispiel der folgenden 9-Permutation:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 3 & 1 & 9 & 7 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

p besitzt folgende Bahnen: $B_1 = \{1, 4, 5, 9\}$, $B_2 = \{2, 8\}$, $B_3 = \{3\}$, $B_4 = \{6, 7\}$.

Man überzeugt sich ohne weiteres, dass eine Bahn nicht verlassen wird, wenn man p wiederholt auf ihre Elemente anwendet. Genauer: Ausgehend von einem beliebigen Element einer Bahn erzeugt die Anwendung von p einen Zyklus, in dem jedes Bahnelement genau einmal auftritt (warum?). Startet man z.B. in B_1 mit der Ziffer 1, so ergibt sich: 1, $p(1) = 5$, $p(5) = 9$, $p(9) = 4$ (und mit $p(4) = 1$ wiederum der Startwert). Der Zyklus wird wie folgt notiert: $z_1 = (1 \times 5 \times 9 \times 4)$. Er lässt sich als "volle" Permutation von $\{1, 2, \ldots, 9\}$ auffassen, wenn man definiert: $z_1(a) = p(a)$, falls a zur Bahn gehört, d.h. eines der Elemente 1, 4, 5, 9 ist; andernfalls $z_1(a) = a$. Damit ergibt sich der

3.2.2. Satz

Jede Permutation lässt sich (bis auf die Reihenfolge) eindeutig als Produkt elementfremder Zyklen darstellen.

Für das Beispiel gilt: $p = (1\ 5\ 9\ 4)\ (2\ 8)\ (3)\ (6\ 7)$.

Die Anzahl l der Elemente einer Bahn definiert die *Länge* des zugehörigen Zyklus. Es ist $l \geq 1$ und damit der betreffende Zyklus in der Form $\left(a\ \ p(a)\ \ p^2(a)\ \ldots\ p^{l-1}(a)\right)$ darstellbar. Im Fall $l = 1$ heißt das einzige Element *Fixpunkt von p*. Im obigen Beispiel ist 3 Fixpunkt von p. Als Permutation ist (3) gleich e und kann daher in der Produktdarstellung von p weggelassen werden.

Sei nun allgemein $p = z_1 \ldots z_r$ die Zyklenzerlegung von p (nach 3.2.2) und $l_1, \ldots, l_r$ die zugehörigen Zyklenlängen. Die Länge l_i eines Zyklus z_i stimmt mit seiner Ordnung als Element in der Permutationsgruppe $\boldsymbol{S}_n$ überein: $\mathrm{ord}(z_i) = l_i$. Daraus wird ersichtlich, dass die Ordnung von p als das kleinste gemeinsame Vielfache aller Zyklenlängen darstellbar ist:

3.2.3. Satz

$ord(p) = kgV(l_1, \ldots, l_r)$

Im Beispiel erhalten wir: $p = \mathrm{kgV}(4, 2, 1, 2) = 4$. In der Tat bilden die Permutationen $e,\ p,\ p^2,\ p^3$ eine Untergruppe von $\boldsymbol{S}_9$ der Ordnung 4.

3.3. Stirling-Zahlen erster Art

Wie viele Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ besitzen genau k Zyklen? Anders ausgedrückt: Auf wie viele Weisen lassen sich n Dinge in k Kreisen anordnen? Man beachte: Die mathematische Auffassung von "Kreisen" als Zyklen schließt ein, dass der Kreis aus aus 1 Ding oder aus 2 Dingen gebildet werden kann.
Die zugehörige Anzahlfunktion wird im folgenden mit $S_1(n, k)$ bezeichnet. Ihre Werte heißen *Stirling-Zahlen erster Art*.
Zunächst sind folgende Sonderfälle rasch einzusehen:
$S_1(n, 1) = (n - 1)!$

$S_1(n,\ n-1) = \binom{n}{2}$

$S_1(n,\ n) = 1$

Es ist ferner sinnvoll zu setzen: $S_1(0,\ 0) = 1$, $S_1(0,\ k) = 0$ für $k > 0$, $S_1(n,\ 0) = 0$ für $n > 0$.
Für die Stirling-Zahlen erster Art gilt die folgende rekursive Gleichung:

3.3.1. Satz

$S_1(n, k) = S_1(n-1, k-1) + (n-1)\, S_1(n-1, k)$ *für* $n, k > 0$

Beweis:
Ein Element a aus $\{1, ..., n\}$ sei fest gewählt. Wir betrachten unter den Permutationen mit k Zyklen diejenigen, in denen der 1-Zyklus (a) vorkommt. Ihre Anzahl ist offenbar $S_1(n-1,\ k-1)$, denn die anderen $n-1$ Elemente sind auf $k-1$ Zyklen verteilt. Tritt hingegen (a) nicht in der Zyklenzerlegung auf, so denken wir uns a aus $\{1, ..., n\}$ und seinem Zyklus entfernt. Es bleiben $n-1$ Elemente übrig, verteilt auf k Zyklen (somit eine auf $S_1(n-1,\ k)$ Weisen herstellbare Konfiguration). Nun wird a wieder eingefügt, wobei es natürlich nicht als einziges Element eines Zyklus auftreten darf. Dies kann dadurch gewährleistet werden, dass man es vor eines der $n-1$ Elemente in einen Zyklus setzt. Nach der Produktregel gibt es demnach $(n-1)\, S_1(n-1,\ k)$ Zerlegungen in k Zyklen $\neq (a)$. Die Summenregel liefert schließlich die behauptete Gleichung. □

Mit Hilfe der Rekursion 3.3.1 lässt sich z.B. der Wert $S_1(n,\ 2)$ wie folgt bestimmen:

3.3.2.

$S_1(n, 2) = (n-1)\,!\left(1 + ... + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right)$

Beweis: vollständige Induktion (als Übung). □

3.3.1 setzt uns auch in die Lage, die Stirling-Zahlen erster Art von Hand für kleine n und k zu berechnen. Bequemer ist es für die praktische Berechnung, eine *Mathematica*-Funktion stirling1[n, k] nach dem Vorbild von 3.3.1 rekursiv zu definieren:

```
stirling1[0, 0] = 1;
stirling1[0, k_] := 0 /; k > 0
stirling1[n_, 0] := 0 /; n > 0
stirling1[n_, k_] := stirling1[n - 1, k - 1] + (n - 1) * stirling1[n - 1, k];
```

Damit erzeugen wir eine Tabelle der kleinen Stirling-Zahlen erster Art:

```
TableForm[Table[stirling1[n, k], {n, 0, 7}, {k, 0, n}]]
```

1							
0	1						
0	1	1					
0	2	3	1				
0	6	11	6	1			
0	24	50	35	10	1		
0	120	274	225	85	15	1	
0	720	1764	1624	735	175	21	1

3.4. Abzählung der Permutationen von gegebenem Zyklentyp

Für das Beispiel aus 3.2 hatten wir die Zyklenzerlegung: p = (1 5 9 4) (2 8) (3) (6 7). Es soll nun nicht darauf geachtet werden, *welche* Ziffern in den einzelnen Zyklen vorkommen. Immerhin lässt sich dann noch feststellen, dass es 1 Zyklus der Länge 1, 2 Zyklen der Länge 2, 0 Zyklen der Länge 3 und 1 Zyklus der Länge 4 gibt. Die Angabe dieser Anzahlen (hier: 1,2,0,1) beschreibt den sog. *Zyklentyp* von p. Dasselbe leistet der rein formale Ausdruck $1^1\, 2^2\, 4^1$. Die Anzahl 0 für Zyklen der Länge 3 braucht dabei nicht berücksichtigt zu werden, weil die Längen in dieser Notation explizit erscheinen.

3.4.1. Definition

Eine Permutation von {1, ..., n} hat den Zyklentyp $1^{b_1}\, 2^{b_2} \ldots n^{b_n}$*, wenn in ihrer Zyklenzerlegung* b_1 *Zyklen der Länge 1,* b_2 *Zyklen der Länge 2, ...,* b_n *Zyklen der Länge n vorkommen.*

Die formalen Exponenten in einem Zyklentyp müssen nach dieser allgemeinen Definition die Bedingung $b_1 + 2\, b_2 + ... + n\, b_n = n$ erfüllen. Außerdem gilt für die Anzahl k ihrer Zyklen die Gleichung $k = b_1 + b_2 + ... + b_n$.

Im folgenden wollen wir die Menge aller Permutationen vom Zyklentyp $1^{b_1}\, 2^{b_2} \ldots n^{b_n}$ abzählen. Die zugehörige Anzahlfunktion bezeichnen wir mit Zyk($b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n$).

Man betrachte das leere Gerüst einer Permutation vom Zyklentyp $1^{b_1}\, 2^{b_2} \ldots n^{b_n}$:

$$(*)\ ...\ \underbrace{(*)}_{b_1}\ \Big|\ \underbrace{(**)\ ...\ (**)}_{b_2}\ \Big|\ \underbrace{(***)\ ...\ (***)}_{b_3}\ \Big|\ \text{usw. ...}\ \Big|\ \underbrace{(*\ \overbrace{*\ ...\ *}^{n})}_{b_n}$$

Die Plätze, auf denen die Ziffern 1, 2, ..., n stehen, sind durch Sternchen * angedeutet. Natürlich ist b_n stets 0 oder 1. Eine passende Verteilung der Ziffern auf diese Plätze kann auf $n!$ Weisen erfolgen. In dieser Anzahl stecken eine Reihe von Mehrfachzählungen, die wir nun in zwei Hauptschritten eliminieren wollen.

1. Entstehen zu einem i ($1 \le i \le n$) dieselben b_i Zyklen (der Länge i), so dürfen diese unter sich beliebig vertauscht werden. Dies geht auf $b_i!$ Arten. Berücksichtigt man sämtliche Zyklenlängen, so ergeben sich nach der Produktregel $b_1! \, b_2! \cdot \ldots \cdot b_n!$ Mehrfachzählungen, durch die die Gesamtzahl $n!$ zu dividieren ist.– Dies entspricht der Anwendung der Formel 2.2.1, wobei die b_i als Wiederholungszahlen der nicht-unterscheidbaren Zyklenblöcke (*), (* *), (* * *) usw. zu deuten sind.

2. Die nach 1. reduzierte Anzahl enthält allerdings immer noch Mehrfachzählungen. Dazu machen wir uns klar, wie die b_i Zyklen der Länge i entstehen. Einen Zyklus der Länge i fassen wir als ein Wort aus i Ziffern auf. Betrachten wir etwa $z_1 = (1 \times 5 \times 9 \times 4)$. Das Anfangselement von z_1 können wir fest vorschreiben. Hätten wir z.B. lieber 9 als 1 vorne stehen, so ist dies möglich, ohne dass dabei ein anderer Zyklus herauskommt: (9 4 1 5) = (1 5 9 4). Wäre beispielsweise $b_4 = 3$ und die 3 Zyklen der Länge 4:

(**9** 4 1 5) (**2** 7 3 6) (**10** 8 12 11),

so wird jeweils (insgesamt 3-mal) ein Element aus 4 Elementen gewählt. Nach der Produktregel ergeben sich somit 4^3 Möglichkeiten, den Typ-Anteil 4^3 zu realisieren. Entsprechendes gilt allgemein für den Typ-Anteil i^{b_i}. Das (echte) Produkt $1^{b_1} \, 2^{b_2} \ldots n^{b_n}$ gibt daher die Mehrfachzählungen an, wenn sämtliche Zyklenlängen berücksichtigt werden.

Nimmt man die Reduktionsschritte 1. und 2. zusammen, so ergibt sich eine Abzählformel, die dem französischen Mathematiker A. L. Cauchy (1789-1857) zugeschrieben wird:

3.4.2. Satz (Cauchy)

Die Anzahl der Permutationen ($\in S_n$), *die den Zyklentyp* $1^{b_1} \, 2^{b_2} \ldots n^{b_n}$ *besitzen, beträgt:*

$$Zyk(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \frac{n!}{b_1! \, b_2! \cdot \ldots \cdot b_n! \, 1^{b_1} \, 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}}$$

Aus dieser Formel lässt sich eine Aussage über die Stirling-Zahlen erster Art gewinnen. Ist nämlich die Zyklenzahl k vorgegeben, so suche man alle zulässigen n-Tupel $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ mit $k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ (zulässig sind die b's, wenn sie einen Zyklentyp festlegen, d.h. wenn $b_1 + 2\,b_2 + \ldots + n\,b_n = n$). Summiert man sämtliche zugehörigen Werte $Zyk(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, so ergibt sich die Anzahl aller Permutationen mit k Zyklen:

$$S_1(n, k) = \sum_{b_1+b_2+\ldots+b_n=k} Zyk(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Beispiel:
$n = 5$, $k = 3$. Gesucht sind alle ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 3$
$b_1 + 2\,b_2 + 3\,b_3 + 4\,b_4 + 5\,b_5 = 5$
mit $0 \le b_i \le 5$ ($i = 1, \ldots, 5$)

Es ergeben sich die beiden 5-Tupel (1,2,0,0,0) und (2,0,1,0,0) bzw. in Zyklentyp-Notation: $1^1 \, 2^2$und $1^2 \, 3^1$. Damit errechnet sich nach der Formel von Cauchy: $S_1(5, 3) = Zyk(1, 2, 0, 0, 0) + Zyk(2, 0, 1, 0, 0) = 15 + 20 = 35$.

Für *Mathematica* lässt sich die in 3.4.2 angegebene Formel so einrichten, dass der betreffenden Funktion zyk[t, n] der Zyklentyp t als Liste der Paare $\{i, b_i\}$ mit $i \neq 0$ übergeben wird; n bedeutet die Anzahl der permutierten Elemente.

```
zyk[t_, n_] := Module[{z = n!},
  Do[z = Quotient[z, Part[t[[i]], 2]!];
     z = Quotient[z, Part[t[[i]], 1]^Part[t[[i]], 2]],
   {i, 1, Length[t]}];
  Return[z]
 ]
```

```
zyk[{{1, 1}, {2, 2}}, 5]
```

```
15
```

```
zyk[{{1, 2}, {4, 2}}, 10]
```

```
56 700
```

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik – Blatt 1

Aufgabe 1

In einem Regal stehen fünf französische, sieben spanische und elf englische Bücher. Auf wie viele Arten lassen sich zwei Bücher in verschiedenen Sprachen auswählen?

Aufgabe 2

Wie viele Diagonalen besitzt ein konvexes n-Eck?

Betrachten Sie zunächst die Fälle $n = 3, 4, 5, 6$; verallgemeinern und begründen Sie dann Ihre Vermutung!

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Anzahl kürzester Wege im Gitter

a) die von $(0, 0)$ nach $(3, 2)$ verlaufen,

b) die von $(-2, 3)$ nach $(1, -2)$ verlaufen,

c) die von $(1, 0)$ über $(2, 3)$ nach $(3, -1)$ verlaufen.

Aufgabe 4

Die n-te regelmässige r-Eck-Punktfigur besteht aus $F_r(n) = n + (r-2)\, d_{n-1}$ Punkten (hierbei ist $d_n = F_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ die n-te Dreieckszahl).

a) Beweisen Sie diese Behauptung durch Induktion (Rekursion aus der Vorlesung benutzen!).

b) Geben Sie eine anschauliche Deutung (Tipp: Suchen Sie die zu d_{n-1} gehörigen Dreiecke in der Gesamtfigur).

Aufgabe 5

Der Floh Leo kann auf einem Papierstreifen mit nummerierten Feldern | 1 | 2 | 3 | ... | n | ... ein oder zwei Felder vorwärts (nach rechts) springen. Zu Beginn steht er in Feld 1. Auf wie viele Weisen kann Leo zum Feld n gelangen?

a) Ermitteln Sie die Ergebnisse für $n = 1, 2, ..., 15$.

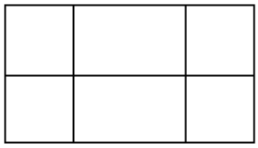
b) Man suche (mittels Summenregel) eine rekursive Gleichung für die gefragte Anzahl.

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik – Blatt 2

Aufgabe 6

Auf wie viele Arten kann man mit höchstens drei Farben diese Flagge so färben, dass zwei Felder mit gemeinsamer Kante stets verschiedene Farben erhalten?



Aufgabe 7

Verifizieren Sie für $m = 1, 2, 3, 4, 5$, dass eine m-elementige Menge ebenso viele Teilmengen gerader wie ungerader Anzahl besitzt.

Aufgabe 8

In einem Multiple-Choice-Test werden Aufgaben mit n Auswahlantworten vorgelegt. Eine Testperson muss mindestens eine Auswahlantwort ankreuzen, kann aber auch alle n ankreuzen. Eine bestimmte Aufgabe enthalte r richtige unter ihren n Auswahlantworten ($1 \le r \le n$).

Wie viele Möglichkeiten gibt es, a) nur richtige, b) nur falsche, c) sowohl richtige als auch falsche Auswahlantworten anzukreuzen?

Aufgabe 9

Auf den Gitterlinien (einschließlich Rand) eines 8×8-Schachbretts sollen Rechtecke gezeichnet werden.

a) Wie viele solcher Rechtecke gibt es?

b) Wie viele solcher Rechtecke gibt es, deren Flächeninhalt mindestens 4 Felder beträgt?

c) Wie viele Quadrate gibt es?

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik – Blatt 3

Aufgabe 10

Ein Zug besteht aus 4 Wagen der 1. Klasse, 7 Wagen der 2. Klasse, 1 Speisewagen, 2 Gepäckwagen (gleichen Aussehens). Wie viele unterscheidbare Wagenfolgen sind möglich

a) wenn die Wagen beliebig eingereiht werden dürfen?

b) wenn die Wagen der 1. Klasse nicht getrennt werden dürfen?

Aufgabe 11

Man bestimme die Anzahl der 8-stelligen Wörter aus 5 Zeichen A und 3 Zeichen B, in denen die Zeichen A nicht sämtlich nebeneinander stehen.

Aufgabe 12

Wie groß ist die Summe aller 5-stelligen Zahlen (im Dezimalsystem), die mit den Ziffern 1 1 1 3 4 gebildet werden können?

Aufgabe 13

Wie viele geordnete Teilmengen kann man aus einer Menge von 10 Elementen auswählen?

Aufgabe 14

a) Wie lautet der Koeffizient von $a^7 b^2 c^4$ in $(a + b + c)^{13}$?

b) Wie lautet der Koeffizient von x^{20} in dem Polynom $(1 + 2x)^{10} (1 - x^2)^6$?

Aufgabe 15

Man beweise: $\binom{2n}{n} > 3^n$ für alle $n \geq 5$.

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik – Blatt 4

Aufgabe 16

Die Gleichung $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$ soll

a) durch direktes Rechnen bestätigt werden;

b) kombinatorisch gedeutet werden (Binomialkoeffizienten mit Auswahlen in Beziehung setzen).

Aufgabe 17

a) Man beweise: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ für alle $n,\ k \geq 1$.

b) Berechnen Sie unter Verwendung von Teil a) die Summe:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Aufgabe 18

Wie viele Summanden hat der vollständig ausgewertete Ausdruck $(a+b+c+d+e)^{11}$?

Aufgabe 19

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, mit einer Lotto-Ziehung ("6 aus 49")

a) 3 Richtige

b) 5 Richtige

c) 5 Richtige mit Zusatzzahl

zu realisieren.

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik – Blatt 5

Aufgabe 20

Bestimmen Sie die Anzahl der Steine eines Dominos, bei denen jedes Paar von Ziffern zwischen 0 und 6 genau einmal vorkommt.

Aufgabe 21

Es wird mit 5 nicht-unterscheidbaren Spielwürfeln geworfen. Wie viele Ausfälle mit einer ungeraden Anzahl von Sechsen sind möglich?

Aufgabe 22

Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen:

ein normaler Spielwürfel mit den Augenbildern "1" bis "6" auf seinen Seiten,

ein Würfel mit einer "3" auf zwei Seiten und einer "5" auf allen übrigen Seiten,

ein Würfel mit einer "2" auf drei Seiten und drei leeren Seiten (die als 0 zählen).

a) Auf wie viele Arten kommt die Augensumme 6 zustande?

b) Welche Augensummen kommen auf die größtmögliche Anzahl von Weisen zustande?

Aufgabe 23

In einen Kasten sollen Kugeln gelegt werden, die mit den Ziffern 1, 2 und 3 beschriftet sind, und zwar soll jede Kugelart

a) höchstens bzw.

b) mindestens so oft vorkommen wie die Ziffer auf der Kugel angibt.

Auf wie viele Arten lassen sich im Fall a) 5 Kugeln, im Fall b) 8 Kugeln in den Kasten legen (ohne Beachtung der Reihenfolge)?

Aufgabe 24*

Berechnen Sie die folgende Summe (mit der Methode, die in der Vorlesung auf entsprechende Summen mit k und k^2 als Faktor vor dem Binomialkoeffizienten angewandt wurde):

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k}$$

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik – Blatt 6

Aufgabe 25

Stellen Sie kombinatorische Aufgaben, die zu den folgenden Erzeugenden Funktionen passen:

a) $(1 + z^2)\,(1 + 3\,z)$

b) $(5\,z + 25\,z^2)\,z$

c) $\frac{z}{1-2\,z}$

d) $\frac{1+z}{1-z}$

Berechnen Sie jeweils eine Lösung für eine Auswahl von 3 Elementen.

Aufgabe 26

a) Sechs (ununterscheidbare) Weihnachtsplätzchen werden an Anni, Bernd und Claudia verteilt; keins der Kinder geht dabei leer aus. Auf wie viele Weisen ist das möglich? Geben Sie eine direkte Lösung. Lösen Sie - alternativ - die Aufgabe auch durch Aufstellen einer Erzeugenden Funktion.

b) Gehen Sie von Ihrer direkten Lösung aus und bestimmen Sie die Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten für den Fall, dass die Plätzchen sich sämtlich unterscheiden lassen.

Aufgabe 27

Eine nicht ganz ernst gemeinte Logelei: Eine Sprachschule hat 777 Studierende, von denen 530 Englisch lernen, 446 Spanisch, 324 Französisch, 167 Englisch und Französisch, 286 Englisch und Spanisch, 87 alle drei Sprachen. Helfen Sie der Verwaltung, die zu ermitteln "vergessen" hat, wie viele der Studierenden Spanisch und Französisch lernen.

Aufgabe 28

Wie viele Zahlen zwischen 1 und 10000 sind nicht durch 3 oder 7 oder 13 oder 17 teilbar?

Aufgabe 29

Man bestimme die Anzahl der Anordnungen (Permutationen) der Zeichen **A B C D E F**, in denen die Folgen **ABC** und **EF** nicht vorkommen.

Aufgabe 30

Wie viele Anordnungen von 1, 2, 3, ..., 10 gibt es, bei denen keine ungerade Zahl an ihrem Platz bleibt?

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik – Blatt 7

Aufgabe 31

Wie viele Folgen der Länge 5 können mit den drei Buchstaben **A**, **B**, **C** gebildet werden, wenn kein Buchstabe in der Folge fehlt?

a) Lösen Sie die Aufgabe mit der Methode der Inklusion/Exklusion. Tipp: Als Sieb eignen sich die drei Mengen von Folgen, in denen jeweils **A** (bzw. **B** bzw. **C**) fehlt.

b) Suchen Sie einen alternativen Lösungsweg, z.B. durch Bestimmen aller zulässigen Buchstaben-Kombinationen und anschließende Berechnung der Anordnungsmöglichkeiten (Permutationen).

Aufgabe 32

Herr Reichlich stirbt unerwartet und nimmt das Codewort zu seinem Tresor mit ins Grab. Seine Angehörigen wissen nur, dass der Code 5-stellig ist und genau 3 Ziffern enthält, unter denen die Ziffern 0 und 4 nicht vorkommen.

Wie viele Codewörter erfüllen diese Bedingung?

Aufgabe 33

Es bezeichne D_n die Anzahl der Dérangements (fixpunktfreien Permutationen) von n Ziffern. Man beweise die rekursiven Gleichungen:

(1) $D_n = (n-1)\,(D_{n-1} + D_{n-2})$

(2) $D_n = n\,D_{n-1} + (-1)^n$

Tipp: Zum Nachweis von (1) betrachte man alle Dérangements mit einer Ziffer k ($\neq 1$) als erstem Element und unterscheide dann, ob 1 auf Platz k steht oder nicht. - Gleichung (2) zeigt man am besten durch vollständige Induktion, wobei (1) benutzt wird.

Aufgabe 34

a) Auf wie viele Weisen können sich n Personen im Kreis aufstellen?

Betrachten Sie zunächst die Fälle $n = 2, 3, 4$. Auch für den Fall $n = 1$ soll der Begriff "im Kreis aufstellen" einen Sinn haben. Verallgemeinern und begründen Sie Ihre Vermutung!

b) Auf wie viele Weisen können sich 5 Personen in 2 Kreisen aufstellen? (Als Kreise sollen hier auch Aufstellungen zu 1 oder 2 Personen gelten.) Versuchen Sie zu verallgemeinern!

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik – Blatt 8

Aufgabe 35

Gibt es eine Permutation p (vom Grad 6), für die ...

a) $p^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,4\,2\,3\,6\,1 \end{pmatrix}$?

b) $p^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,5\,6\,1\,3\,2 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 36

Man berechne $\left[{6 \atop 2} \right]$ auf zwei Wegen:

a) mit Hilfe der Rekursion für Stirling-Zahlen erster Art

b) durch systematische Abzählung der 6-Permutationen mit 2 Zyklen.

Aufgabe 37

a) Welchen Zyklentyp besitzt die Permutation $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 3\,7\,4\,1\,2\,8\,5\,6 \end{pmatrix}$?

b) Wie viele Permutationen (gleichen Grades) haben denselben Zyklentyp?

Aufgabe 38

Beweisen Sie (durch vollständige Induktion):

$$\left[{n \atop 2} \right] = (n-1)!\, H_{n-1}$$

Hierbei bezeichnet $H_m = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m}$ (die m-te harmonische Zahl).

Aufgabe 39

Man bestimme die Anzahl der Anordnungen (Permutationen) der Zeichen **A B C D E F G**, in denen die Folgen **AC** und **DFG** und **GB** nicht vorkommen.

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik – Blatt 9

Aufgabe 40

Welche Zyklentypen sind für eine 8-Permutation mit 3 Zyklen möglich?

Berechnen Sie die Anzahl der Permutationen zu jedem dieser Typen und daraus den Wert von $\left[\begin{matrix} 8 \\ 3 \end{matrix} \right]$.

Aufgabe 41

Auf wie viele Weisen lässt sich eine Menge von 8 Dingen in nichtleere disjunkte Klassen einteilen?

(Benutzen Sie die Stirlingzahlen zweiter Art.)

Aufgabe 42

Beweisen Sie: $\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (3^{n-1} + 1) - 2^{n-1}$ (für alle n)

Hinweis: Vollständige Induktion, dabei die Rekursionsformel für die Stirlingzahlen zweiter Art benutzen.

Aufgabe 43*

Auf wie viele Weisen kann man zwei nichtleere disjunkte Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ auswählen?

Übungsaufgaben zur Kombinatorik (2005)

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik
Blatt 1

Aufgabe 1

In der Vorratskammer gibt es zwölf Äpfel, acht Birnen und sieben Pfirsiche. Peter soll seiner Mutter zwei Obststücke holen.

Auf wie viele Arten kann er eine Auswahl treffen …

a) wenn es gleichgültig ist, von welcher Sorte die Obststücke sind,

b) wenn er gleichsortige Obststücke wählen soll,

c) wenn er verschiedene Sorten wählen soll ?

Hinweis: Auch Obststücke gleicher Sorte sind als unterscheidbar anzusehen.

Aufgabe 2

Wie viele Diagonalen besitzt ein konvexes n-Eck?

Betrachten Sie zunächst die Fälle $n = 3, 4, 5, 6$. Suchen (und begründen) Sie eine allgemeine Zählformel!

Aufgabe 3

Wie viele der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 10^7 enthalten in ihrer Dezimaldarstellung die Ziffer 1 ?

Aufgabe 4

---

a) Wie viele Teiler hat 1400 ?

b) Gibt es dreistellige natürliche Zahlen mit dieser Anzahl von Teilern? Bestimmen Sie die kleinste und die größte von ihnen!

Aufgabe 5

Verifizieren Sie für $n = 1, 2, 3, 4, 5$, dass eine n-elementige Menge ebenso viele Teilmengen gerader wie ungerader Anzahl besitzt. Suchen Sie eine bijektive Abbildung zwischen diesen beiden Arten von Teilmengen!

Aufgabe 6

In einem Multiple-Choice-Test werden Aufgaben mit n Auswahlantworten vorgelegt. Eine Testperson muss mindestens eine Auswahlantwort ankreuzen, kann aber auch alle n ankreuzen. Eine bestimmte Aufgabe enthalte r richtige unter ihren n Auswahlantworten ($1 \leq r \leq n$).

Wie viele Möglichkeiten gibt es, a) nur richtige, b) nur falsche, c) sowohl richtige als auch falsche Auswahlantworten anzukreuzen?

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik
Blatt 2

Aufgabe 7

Man bestimme die Anzahl kürzester Wege im Gitter, die …

a) von (0, 0) nach (3, 2) verlaufen,

b) von $(-2, 3)$ nach $(1, -2)$ verlaufen,

c) von (1, 0) über (2, 3) nach $(3, -1)$ verlaufen.

Aufgabe 8

Der Floh Fibo kann auf einem Papierstreifen mit nummerierten Feldern

| 1 | 2 | 3 | ... | n | ...

ein oder zwei Felder vorwärts (nach rechts) springen. Zu Beginn steht er in Feld 1.

Auf wie viele Weisen kann Fibo zum Feld n gelangen?

a) Ermitteln Sie die Ergebnisse für $n = 1, 2, \ldots, 7$.

b) Man suche (mittels Summenregel) eine rekursive Gleichung für die gefragte Anzahl.

Aufgabe 9

Aus den Buchstaben **A** und **B** werden Wörter der Länge 8 gebildet, in denen **A** genau 5-mal, **B** genau 3-mal auftritt.

Wie viele solcher Zeichenfolgen gibt es, wenn …

a) die Buchstaben **A** nicht sämtlich nebeneinander stehen,

b) die Buchstaben **B** niemals nebeneinander stehen ?

Aufgabe 10

Wie viele geordnete Teilmengen kann man aus einer Menge von zehn Elementen auswählen?

Aufgabe 11

Es wird mit fünf nicht-unterscheidbaren Spielwürfeln geworfen.

Wie viele Ausfälle (Wurfbilder) mit einer ungeraden Anzahl von Sechsen sind möglich?

Aufgabe 12

Elf Wissenschaftler arbeiten an einem Geheimprojekt. Sie wollen ihre Dokumente in einem Sicherheitsschrank unter Verschluss halten. Der Schrank soll sich dann und nur dann öffnen lassen, wenn mindestens sechs Wissenschaftler anwesend sind.

a) Wie viele Schlösser werden für den Schrank mindestens benötigt?

b) Welches ist die kleinste Anzahl von Schlüsseln (für diese Schlösser), die jeder der Wissenschaftler bei sich tragen muss?

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik
Blatt 3

Aufgabe 13

Die Identität $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$ soll

a) durch direktes Rechnen bestätigt werden,

b) kombinatorisch gedeutet werden (Auswahlen!).

Aufgabe 14

Bestimmen Sie in den Koeffizienten von x^{13} in den Ausdrücken

a) $(1 - 2x)^{15}$

b) $(7 + 3x^2)^{11}$

c) $(1 - 2x)^{15}(1 + 5x^3)^4$

Aufgabe 15

Beweisen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Tipp: Quadrate aufspalten und Symmetrie der Binomialkoeffizienten verwenden!

Aufgabe 16

Es bezeichne d_n die Summe der Binomialzahlen in der n-ten aufsteigenden Diagonalen des Pascalschen Dreiecks, also z.B.

$$d_6 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3}$$

Es gilt (offensichtlich): $d_0 = d_1 = 1$.

Man beweise: $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ für alle $n \geq 2$.

(Vgl. hierzu die Lösung von Aufgabe 8)

Aufgabe 17

Berechnen Sie die Summe : $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

Aufgabe 18

Wie viele Summanden hat der vollständig ausgewertete Ausdruck $(a + b + c + d + e)^{11}$?

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik
Blatt 4

Aufgabe 19

Wie viele Zahlen zwischen 1 und 10000 sind nicht durch 3 oder 7 oder 13 oder 17 teilbar?

Aufgabe 20

Von 100 Studierenden, die die Fächer Algebra, Biologie und Chemie belegen, haben jeweils zur selben Zeit: 23 Algebra und Biologie, 40 Algebra und Chemie, 42 Biologie und Chemie, und 15 alles zusammen. Wie viele Studierenden haben keine Konflikte mit dem Stundenplan?

Aufgabe 21

Unter elf Dometschern, die eine Delegation von Politikern begleiten, sind vier Fremdsprachen wie folgt vertreten: Zu jeder Fremdsprache gibt es fünf Dolmetscher, die sie beherrschen; zu jeder Kombination von zwei Sprachen findet man zwei Dolmetscher, die beide Sprachen beherrschen; die Kombinationen von drei Sprachen sind jeweils nur noch durch einen geeigneten Dolmetscher abgedeckt.

In einer bestimmten Situation benötigte man eine Person, die alle vier Sprachen beherrscht. Findet man sie unter den elf?

Aufgabe 22

Eine elektronisch gesicherte Stahltür soll einen 8-stelligen Zugangscode aus gewöhnlichen Dezimalziffern enthalten. Die drei Teilfolgen 007, 0815 und 4711 dürfen nicht Teil des Codeworts sein. Wieviel Codewörter erfüllen diese Bedingung?

Aufgabe 23

Man bestimme die Anzahl der Anordnungen (Permutationen) der Zeichen **A B C D E F G**, in denen die Folgen **AC** und **DFG** und **GB** nicht vorkommen.

Aufgabe 24

In einer Gruppe von 30 Personen sind 18 Frauen, 22 verheiratet und 24 im Besitz eines Führerscheins. Welches ist die Mindestanzahl (Höchstanzahl) verheirateter Frauen mit Führerschein?

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik
Blatt 5

Aufgabe 25

Auf wie viele Arten kann man 6 Bücher auf 3 Schüler verteilen, wenn kein Schüler leer ausgehen soll?

Aufgabe 26

Wie viele Permutationen der Menge {1, 2, …, 13} haben genau vier Fixpunkte?

Aufgabe 27

Wie viele Anordnungen von 1, 2, …, 10 gibt es, bei denen keine ungerade Zahl an ihrem Platz bleibt?

Aufgabe 28

Herr Reichlich stirbt unerwartet und nimmt das Codewort zu seinem Tresor mit ins Grab. Seine Angehörigen wissen nur, dass der Code sechsstellig ist und genau vier Ziffern enthält, unter denen 0 und 1 nicht vorkommen.

Wie viele Codewörter erfüllen diese Bedingung?

Aufgabe 29

Auf wie viele Weisen können sich n Personen im Kreis aufstellen?

Aufgabe 30

Auf wie viele Weisen können sich 7 Personen in 2 Kreisen aufstellen?

(Als Kreise sollen hier auch Aufstellungen zu 1 oder 2 Personen gelten.)

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik
Blatt 6

Aufgabe 31

Bestimmen Sie zu jeder der Folgen die zugehörige GEF in einfacher, geschlossener Form:

a) $a_n = 5\,n + 3$

b) $b_n = 3^n$

c) $c_n = 5 \cdot 7^n - 3 \cdot 4^n$

d) $d_n = 0$ für $0 \le n \le 3$, $d_n = 1$ für $n > 3$.

e) $e_n = 1$, falls 4 Teiler von n; $e_n = 0$ sonst.

Aufgabe 32

Ermitteln Sie folgende Koeffizienten:

a) $[x^{23}]\,(1 + x^5 + x^9)^{100}$

b) $[x^n]\,\dfrac{3 - x}{1 - 3\,x + 2\,x^2}$

c) $[x^n]\,\dfrac{1}{(1 - a\,x)\,(1 - b\,x)}$

Aufgabe 33

Es sei $F(x)$ die GEF für die Folge $f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots$

a) Zeigen Sie: $f_0,\ 0,\ f_2,\ 0,\ f_4,\ 0,\ \ldots$ hat die GEF: $\frac{1}{2}\,\{F(x) + F(-x)\}$

b) Wie lautet die GEF der Folge $0,\ f_1,\ 0,\ f_3,\ 0,\ f_5,\ 0,\ \ldots$?

Aufgabe 34

Die Folge $(a_n)_{n \ge 0}$ sei rekursiv definiert: $a_0 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2\,n$

a) Man bestimme die zugehörige GEF.

b) Es ist a_n aus der GEF in expliziter Form zu bestimmen.

c) Man beweise für alle $n \geq 1$:

a_n ist die Anzahl der Gebiete, in die n Kreise die Ebene zerschneiden, wenn angenommen wird, dass zwei Kreise sich stets in genau zwei Punkten schneiden und durch keinen Punkt drei Kreise gehen.

Tipp: Den Beweis zu c) führt man am besten induktiv (d.h. Nachweis der obigen rekursiven Darstellung durch vollständige Induktion).

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik
Blatt 7

Aufgabe 35

Es bezeichne D den Differentialoperator für formale Potenzreihen.

Man beweise die Summenregel und die Produktregel in folgender Form:

$$D(A(x) + B(x)) = D\,A(x) + D\,B(x)$$

$$D(A(x) \cdot B(x)) = (D\,A(x)) \cdot B(x) + A(x) \cdot D\,B(x)$$

Aufgabe 36

$F(x)$ und $G(x)$ heißen zueinander reziprok, wenn $F(x) \cdot G(x) = 1$ gilt. In diesem Fall wird symbolisch $G(x) = F(x)^{-1}$ oder $= \frac{1}{F(x)}$ geschrieben.

Man beweise die Reziprokenregel in der Form:

$$D\,\{F(x)^{-1}\} = -\frac{1}{F(x)^2}\,D\,F(x)$$

Tipp: Produktregel (aus Aufgabe 35) auf $F(x) \cdot F(x)^{-1} = 1$ anwenden. Es ist $D\,1 = 0$ (warum?).

Aufgabe 37

Es sei $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Es gilt daher die Rekurrenzgleichung: $a_{n+1} = a_n + (n+1)^2$ für $n \geq 0$, und $a_0 = 0$.

Nach dem Standardverfahren ergibt sich hieraus die GEF der Folge a_n als $A(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^4}$.

a) Rechnen Sie dies im Einzelnen nach. Dabei kann die in der Vorlesung hergeleitete Formel für die GEF der Quadratzahlenfolge benutzt werden: $\sum_{n\geq 0} n^2\,x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

b) Entwickeln Sie $A(x)$ in eine Potenzreihe. Es ist dann $[x^n]\,A(x)$ der bekannte Produkt-Ausdruck für die Summe der ersten n Quadratzahlen.

Aufgabe 38

Bei einem Spielwürfel mögen die drei gegenüberliegenden Seitenpaare jeweils gleiche Augenzahlen 2, 3 und 4 aufweisen. Bei einem Oktaeder mögen die Augenzahlen 1 und 2 gleich oft auf den Seitenflächen vorkommen.

Nun wird der Spielwürfel zusammen mit zwei Oktaedern der beschriebenen Art geworfen.

Welche Augensummen sind möglich und auf wie viele Arten können sie jeweils realisiert werden?

Hinweis: Machen Sie einen GEF-Ansatz!

Aufgabe 39

Einem hochgestellten Staatsbesucher soll ein Geschenkpaket mit edelsten Weinsorten aus vier europäischen Ländern überreicht werden. Der mit der Beschaffung beauftragte Akquisiteur sieht sich einer Reihe von Vorgaben und Einschränkungen gegenüber: Die italienische, spanische und deutsche Weinsorte ist unbeschränkt lieferbar, während es von der vorgesehenen französischen Sorte nur noch drei Flaschen gibt. Die italienische Ware kann nur in Doppelpacks bestellt werden, und es sollen mindestens zwei Flaschen der spanischen Sorte vertreten sein. Im Übrigen bleibt es dem Akquisiteur überlassen, ob er eine Ländersorte nimmt und wenn ja, welche Menge er von ihr ordert.

Auf wie viele Weisen lässt sich (unter diesen Bedingungen) eine Kiste aus zehn Flaschen zusammenstellten?

Anleitung: Entwickeln Sie zunächst ein "Boxenmodell", das die Auswahlbedingungen beschreibt. Notieren Sie dann die zugehörige GEF und stellen Sie sie in einfacher, geschlossener Form dar. Anschließend entwickeln Sie die GEF in eine Potenzreihe $G(x)$ und berechnen den Koeffizienten $[x^n]\,G(x)$. Für $n = 10$ ergibt sich die Antwort auf die gestellte Frage.

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik
Blatt 8

Aufgabe 40

Beweisen Sie für alle ganzen Zahlen $m \geq 1$: $D\{(1-x)^m\} = -m(1-x)^{m-1}$

Anleitung: Vollständige Induktion nach m; beim Induktionsschritt die Produktregel verwenden (vgl. Aufgabe 35).

Aufgabe 41

Sei $m \geq 1$ beliebig ganz. Beweisen Sie:

a) $D\left\{\frac{1}{1-x}\right\} = \frac{1}{(1-x)^2}$

b) $D\left\{\frac{1}{(1-x)^m}\right\} = \frac{m}{(1-x)^{m+1}}$

c) $D^k\left\{\frac{1}{(1-x)^m}\right\} = \frac{(m+k-1)^{\underline{k}}}{(1-x)^{m+k}}$ für alle ganzen $k \geq 1$

Anleitung: a) Reziprokenregel benutzen (vgl. Aufgabe 36); b) Reziprokenregel und Aufgabe 40 benutzen; c) vollständige Induktion nach k unter Verwendung von Teil b). – Der Zähler auf der rechten Seite der Gleichung c) ist eine fallende Faktorielle.

Aufgabe 42

Obsthändler Meier bietet seine Ware in speziellen Auslagekisten an. Drei davon werden mit Äpfeln gefüllt, und zwar grundsätzlich jede mit mindestens 20 Stück. In eine Kiste passen höchstens 30 Äpfel.

a) Auf wie viele Weisen kann Meier 70 Äpfel auf die drei Kisten verteilen?

b) Auf wie viele Weisen lassen sich 80 Äpfel verteilen?

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten für n Äpfel.

Hinweis: Die Äpfel sind als nicht-unterscheidbar anzusehen.

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik
Blatt 9

Aufgabe 43

a) Welchen Zyklentyp hat die Permutation $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 3\,7\,4\,1\,2\,8\,5\,6 \end{pmatrix}$?

b) Wie viele Permutationen besitzen diesen Zyklentyp?

Aufgabe 44

Berechnen Sie $S_1(8, 3) = \left[{8 \atop 3} \right]$:

a) anhand der Tabelle der Stirling-Zahlen 1. Art,

b) über Cauchys Formel für die Zyklentypen,

c) mit Hilfe der expliziten Summendarstellung.

Aufgabe 45

Wie üblich bezeichne $x^{\underline{n}}$ die fallende Faktorielle $x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)$.

Zeigen Sie:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k\geq 0} \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k}\, x^k$$

Aufgabe 46

Beweisen Sie:

$$\left[{n \atop 2} \right] = (n-1)!\, H_{n-1}$$

Hierbei bezeichnet $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}$ (die m-te harmonische Zahl).

Anleitung: Es bieten sich mindestens drei Beweis-Varianten: 1.) Der einfachste Weg: eine vollständige Induktion unter Verwendung der Rekurrrenzgleichung für die Stirling-Zahlen 1. Art. 2.) Eine direkte

Rechnung nach dem Vorbild von Aufgabe 30. 3.) Direkte Auswertung von $S_1(n, 2)$ mit Hilfe der expliziten Summendarstellung. – Versuchen Sie möglichst viele, mindestens aber einen Beweis zu führen.

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zur Kombinatorik
Blatt 10

Aufgabe 47

Die in der Vorlesung begonnene Tabellierung der Stirling-Zahlen 2. Art ist bis $S_2(10, k)$, $0 \le k \le 10$, fortzuführen.

Leiten Sie aus der Tabelle ab, auf wie viele Arten jeweils eine 8-elementige, eine 9-elementige und eine 10-elementige Menge in (nichtleere) Blöcke zerlegt werden kann.

Aufgabe 48

Wie viele Partitionen können wir in {1, 2, …, 10} bilden, in denen 1 und 2 nicht als einelementige Blöcke auftreten?

Aufgabe 49

a) Leiten Sie aus der expliziten Summendarstellung der Stirling-Zahlen 2. Art rechnerisch her:

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über die Rekurrenzgleichung der Stirling-Zahlen 2. Art:

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$$

Aufgabe 50

Man beweise für alle $n \ge 1$:

$$\left\{ {n \atop 3} \right\} = \tfrac{1}{2}\,(3^{n-1} + 1) - 2^{n-1}$$

Anleitung: Aus der expliziten Summendarstellung der Stirling-Zahlen 2. Art herleiten oder – viel einfacher (!) – mittels vollständiger Induktion über die Rekurrenzgleichung der $S_2(n, k)$.

Zusatzaufgabe für die Semesterferien

Auf wie viele Weisen kann man ein ungeordnetes Paar nichtleerer disjunkter Teilmengen von {1, 2, …, *n*} bilden?

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Aufgaben zur Wiederholung
Kombinatorik

Die folgenden sechs einfachen Übungen dienen zur Wiederholung des Vorlesungsstoffs aus Kapitel 1 bis 4 (während der zweiwöchigen Veranstaltungspause nach Pfingsten). Die Aufgaben werden *nicht* in den Übungsgruppen behandelt; doch ist es für jeden Studierenden der Kombinatorik dringend zu empfehlen, die Lösungen *auf sich allein gestellt* zu erarbeiten. Die Anzahlergebnisse (nicht die Lösungswege) werde ich in der zweiten Juni-Hälfte zu Vergleichszwecken auf der Übungen-Seite dieser Verstaltung im Internet bekanntgeben.

Aufgabe W1

Wie viele Teilmengen von {1, 2, …, 10} enthalten wenigstens eine ungerade Zahl?

Aufgabe W2

Für wie viele Permutationen p von {1, 2, 3, 4, 5, 6} gilt $p(1) \neq 2$?

Aufgabe W3

Auf wie viele Arten lässt sich 19 als Summe darstellen, in der nur 2 und 3 als Summanden vorkommen. (Darstellungen mit Summanden in anderer Reihenfolge gelten als verschieden.)

Aufgabe W4

Eine Ziffernfolge soll aus 4 Nullen und 8 Einsen bestehen, wobei niemals zwei Nullen aufeinanderfolgen. Wie viele solcher Folgen gibt es?

Aufgabe W5

In einer Schublade liegen 3 blaue, 3 rote und 4 grüne Socken. Wie viele Auswahlen von 8 Socken sind möglich? (Gleichfarbige Socken sind nicht unterscheidbar.)

Aufgabe W6

Wie lautet der Koeffizient von x^{12} in $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$?

Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Klausur zur Kombinatorik (SS 2005)

Sie haben 120 Minuten Zeit.

Ab 17 Punkten gilt die Klausur als bestanden.

Aufgabe 1 (3 + 5 P.)

Fünf unterschiedliche Pralinen werden auf vier nummerierte Schachteln verteilt.

Auf wie viele Weisen ist das möglich, wenn …

a) die Pralinen beliebig verteilt werden dürfen?

b) höchstens die Schachteln Nr. 3 und Nr. 4 leer bleiben dürfen?

Aufgabe 2 (4 + 4 P.)

Am Sportunterricht nehmen zehn Schüler teil. Auf wie viele Weisen können sie …

a) vier Gruppen verschiedener Größe bilden?

b) sich in Zweiergruppen aufteilen?

Aufgabe 3 (7 P.)

Johanna hat 16 Fünf-Cent-Münzen, 21 Zehn-Cent-Münzen und 3 Zwanzig-Cent-Münzen gesammelt. Sie möchte ihrem kleineren Bruder 20 Münzen abgeben. Wie viele Auswahl-Möglichkeiten hat Johanna dafür?

Aufgabe 4 (3 + 6 P.)

---

a) Welche Zyklentypen kann eine Permutation 6-ten Grades mit 3 Zyklen haben?

b) Berechnen Sie über diese Zyklentypen die Stirling-Zahl $S_1(6, 3)$.