Anwendungen in Alltag und Wissenschaft

- Zum Begriff "Anwendung"
- Anwendungsorientierter Mathematikunterricht?
- Wirklichkeit verstehen durch Modellbildung
- Beispiele für die Sekundarstufe I
- Ergänzende Materialien
- Aufgabe

Zum Begriff "Anwendung"

Dass Schülern ermöglicht werden soll, die Nutzbarkeit (Anwendbarkeit) der Mathematik zu erfahren, ist heute ein weltweit und allgemein anerkanntes Ziel des Mathematikunterrichts. Unter "Anwenden" versteht man dabei jeglichen Gebrauch mathematischer Begriffe und Methoden zur Beschreibung (Modellierung) und Lösung außermathematischer Probleme. Außermathematisch ist vieles (das meiste), und daher ist diese Definition allgemein genug, um auch Dinge aus Alltag, Wissenschaft oder Kultur einzuschließen, an die man vielleicht nicht als erstes denkt, wenn vom Nutzen der Mathematik die Rede ist. Ein derart erweitertes und offenes Verständnis von Nutzbarkeit kommt vor allem den Lernenden entgegen, die wissen möchten, inwiefern Mathematik etwas mit *ihrer Lebens- und Vorstellungswelt* zu tun hat.

Davon zu unterscheiden ist die (im engeren Sinne) angewandte Mathematik. Diese entwickelt einen Vorrat von Theorien, mit denen Physiker, Ingenieure, Biologen usw. das Verhalten mehr oder weniger komplexer Systeme beschreiben und rechnerisch beherrschen können (häufig mit Hilfe von Differentialgleichungen). Auch die Statistik und Zweige der mathematischen Ökonomie (Spieltheorie, Finanzmathematik, etc.) gehören mit ihren fertigen Anwendungsstrukturen dazu. In letzter Zeit macht eine "Technomathematik" (Neunzert) von sich reden. Sie will zu aktuell auftretenden Problemen aus Industrie und Wirtschaft maßgeschneiderte Modelle entwickeln, aus denen sich praxistaugliche Lösungen – meist unter geschicktem Einsatz von Computern – ableiten lassen.

Anwendungsorientierter Unterricht?

Traditionelles Sachrechnen

Die althergebrachte Form, Mathematik im Klassenzimmer anzuwenden, ist das *Sachrechnen*. Nach traditioneller Auffassung handelt es sich dabei um das sogenannte *bürgerliche Rechnen* mit Maßen und Gewichten einschließlich Dreisatz-, Prozent- und Zinsrechnung. In den 70-er Jahren haben vor allem strukturalistische Einflüsse die Bedeutung des Sachrechnens zunächst geschmälert. Nach dem Scheitern der "Neuen Mathematik" wurde es dann aber wieder aufgewertet, unter anderem durch eine stärkere begriffliche Durchdringung (Idee der Abbildung, Proportionalität), inhaltliche Erweiterungen (Ungleichungen, Optimierungsaufgaben, einfache statistische Fragestellungen) sowie methodische Reformen ("offene" Aufgaben, kleine Unterrichtsprojekte).

Das traditionelle Sachrechnen muss(te) sich einige Kritik gefallen lassen, zum Beispiel:

- Die Sachsituationen sind häufig wirklichkeitsfremd oder zu stark simplifiziert.
- Die Anwendungen erfolgen punktuell, meist im Rahmen einer einzelnen Aufgabe.
- Die Mehrzahl der Aufgaben sind bloß oberflächliche Texteinkleidungen einer Formel.

Es liegt auf der Hand, dass solche konzeptionellen Mängel Fehlverständnisse bei den Schülern nach sich ziehen. Unangemessen erscheint auch das Bild von der Art und Weise, wie Mathematik – vermeintlich – praktisch genutzt wird.

Das Prinzip "Anwendungsorientierung"

Mit der – inzwischen in praktisch allen Lehrplänen auftauchenden – Idee eines "anwendungsorientierten" Unterrichts soll dem entgegengetreten werden. Die wichtigsten Forderungen lauten:

- Als (meist "offene") Fragestellungen sind *authentische* Anwendungsprobleme zu wählen.
- In den zugrunde liegenden Sachsituationen sollen Schüler einen Teil ihrer Umwelt (Lebenswelt) erkennen (*Relevanzpostulat*).
- Das Problemlösen erfolgt durch *Modellbildung* und ist als solche bewusst zu machen.
- Der Unterricht ist *interdisziplinär* zu gestalten und sollte *projektartige Arbeitsformen* nutzen

Dieser (vermutlich noch verlängerbare) Katalog entwirft einen in der Unterrichtspraxis bei weitem nicht verwirklichten (vermeintlichen) Idealzustand.

Entschiedene Befürworter einer so verstandenen Anwendungsorientierung halten der überwiegend noch skeptischen Lehrerschaft entgegen, sie könne sich nicht oder nicht gründlich genug von den einmal an der Universität gelernten Schematismen sachlogischer Strukturierung lösen und bleibe zu sehr formalen Anwendungsroutinen verhaftet. Um das Konzept mit Leben zu füllen und damit für das Klassenzimmer zu empfehlen, wurden von Fachdidaktikern und engagierten Lehrer(inne)n zahlreiche Unterrichtsvorschläge entwickelt.

Auf einige ausgewählte Quellen sei hier verwiesen:

- Der Sammelband Becker, G.; et al.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Verlag Julius Klinkhardt: Bad Heilbrunn/Obb. 1979 mit sechs ausführlich dargestellten Unterrichtseinheiten (Landkarten, Warteschlangen, Eisenbahn, Flugreisen, Kalender, Wahlen)
- Diverse einschlägige Themenhefte einiger fachdidaktischer Zeitschriften, etwa *Der Mathematikunterricht* und *Mathematik lehren* (vor allem in den 90-er Jahren)
- Die Schriftenreihe Blum, W. (Hrsg.): ISTRON-Schriftenreihe *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. Verlag Franzbecker: Bad Salzdetfurth; Hildesheim 1994 ff
- MUED Materialien für den Mathematikunterricht (hrsg. von der Lehrervereinigung MUED e.V. nebst Verlag); Schwerpunkt: Umwelterziehung

Einige bekannte Schwierigkeiten

An einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht, der durch die oben genannten Maximalforderungen gekennzeichnet ist, knüpfen sich einige hinlänglich bekannte und immer wieder aufs neue angegangene Probleme.

Das Problem der Authentizität

Sogenannte echte Anwendungen, d.h. solche, die in Industrie, Wirtschaft, Administration usw. tatsächlich auftreten und dort von praktischer Bedeutung sind, erweisen sich in den meisten Fällen als vergleichsweise komplex. Ihre Behandlung (Modellierung) erfordert Mittel der Systemanalyse und -beschreibung, die gewöhnlich nicht mehr in Reichweite der Schulmathematik liegen. Man muss sich auf einfachere bzw. (oft stark) vereinfachte Aufgabenstellungen beschränken, und auch diese sind oft nur Leistungskursen der Sekundarstufe II zugänglich.

Das Problem der Relevanz

In der Relevanz eines Problems soll sich seine Beziehung zum Erfahrungsbereich bzw. zur Lebenswelt eines Individuums oder einer Gruppe ausdrücken. Gibt es genügend auf überzeugende Weise realitätsbezogene Fragestellungen, durch die sich Schüler angesprochen fühlen können? Sind relevante

Themen ein Ersatz für die "authentischen" (ohnehin zu schwierigen) Aufgaben aus rein technologisch verstandenen Zweckzusammenhängen? Sie verlangen häufig – z.B. bei umweltbezogenen Fragen –, dass Wertungen bewusst vollzogen und Ergebnisse kritisch verwendet werden.

Unterrichtsmethodische Probleme

Das programmatische Anhängsel "Orientierung" deutet darauf hin, dass der Unterricht durchgängig auf Anwendungen ausgerichtet werden soll. Ist dies schon im Hinblick auf ein Gesamtbild von Mathematik unausgewogen und fragwürdig, so erst recht aus unterrichtsmethodischer Sicht. Die meist projektartig zu behandelnden Themenpakete kosten Zeit, die den Standardstoffen entzogen werden muss. Umgekehrt braucht man in den Anwendungsprojekten ein solides Grundverständnis dieser Standardstoffe.

Es genügt nicht, lediglich den Anteil "anwendungsorientierter" Unterrichtsphasen vorsichtig zu dosieren. Auch die einzelne Dosis selbst, d.h. die inhaltliche und zeitliche Ausdehnung eines Vorhabens, ist der jeweiligen Klassensituation anzupassen, wenn man ein Absacken der Aufmerksamkeit verhindern will. Die Modellbildung erfordert den Einsatz heuristischer Strategien und wird damit zu einer für viele Schüler schwierigen Unternehmung. Damit verflochten ist die Erkundung des betroffenen Sachbereichs, der häufig in die Domäne anderer (auch nicht-schulischer) Fächer hineinreicht. Echte interdisziplinäre Zusammenarbeit bleibt – nicht nur im Bereich der Schule –- vielfach ein frommer Wunsch.

Die besondere "Wirklichkeit"

Kann man zwei Dutzend Schüler über mehrere Tage oder Wochen hinweg für den Problemkreis "Altersvorsorge" interessieren? Haben Themen wie "Waldschadenstatistik", "Spritverbrauch bei 150 km/h" oder "Optimierung der Cola-Dose" dann vielleicht bessere Chancen? – Blättert man in einschlägigen Materialsammlungen, so finden sich Unterrichtsvorschläge vorwiegend aus den Bereichen

- *Verkehr*: z.B. Geschwindigkeitsbeschränkung, Entwurf einer Ampelschaltung, Eisenbahn
- *Population*: z.B. Bevölkerungswachstum, Leben und Sterben, Lebensversicherung
- *Umwelt*: z.B. Energiesparlampen, Ozonalarm, AKW-Risiken, Sonnenenergie
- *Sport*: z.B. Vergleich von Höchstleistungen, Kugelstoßen, Segelfliegen
- *Wirtschaft*: z.B. Preisindizes, einfache Marktmodelle, Vergleich von Kreditangeboten

Auffallend häufig (sachlich nicht unbegründet) erscheint das Thema "Verkehr", vermutlich nicht so sehr, weil dabei die Physik von Bewegungsvorgängen eine Rolle spielt, als vielmehr wegen des damit verbundenen Aspekts der Umwelterziehung. Hin und wieder tauchen biologische Fragestellungen auf. Endgültig verblasst scheint der vormalige Glanz physikalischer Probleme. Ebenfalls am unteren Ende fristet die Geometrie ein Schattendasein, obwohl sie einen konkurrenzlos direkten Zugang zur Realität ermöglicht.

Die oft mit viel Liebe zum Detail ausgearbeiteten Unterrichtseinheiten richten sich überwiegend an die Sekundarstufe II. Zum einen liegt das in der mathematisch anspruchsvolleren Natur der behandelten Themen selbst; zum anderen benötigen die vergleichsweise bescheideneren Anwendungen, die man mit 10- bis 16-Jährigen versuchen kann, nicht jenen Typ von Minitheorie, zu dem Fachdidaktiker ihre eigenen Modellbildungen gerne aufrüsten. Zweifellos wurden dabei viele inhaltlich wertvolle, anregende und unterrichtstaugliche Vorschläge entwickelt. Freilich, die Medaille hat auch ihre Kehrseite: Der Zugriff auf ein Archiv ausgearbeiteter und pädagogisch aufbereiteter Kleinanwendungen spart Arbeit, die vielleicht nicht in diesem Ausmaß gespart werden sollte. Gerade das, was eine authentische Anwendungssituation auszeichnet, droht dadurch verloren zu gehen: der in *offener* Modellbildung zu suchende *eigene Weg zu einer Lösung*. Das Anwenden von Mathematik lernt man erst in zweiter Linie durch den inszenierten Nachvollzug von Fertig-Anwendungen.

In ein vorpräpariertes Themenpaket lassen sich zudem – anders als dies bei weitgehend offen gehaltenen Problemkreisen der Fall sein dürfte – wohlgemeinte pädagogische Botschaften packen, etwa Ziele für verantwortliches Handeln in Um- und Mitwelt. Allerdings kann Einseitigkeit – auch wenn es die "richtige" Seite ist – leicht abstumpfen oder ins Gegenteil umschlagen, z.B. bei einem "Modell" der Realität, das von Autolawinen, Müllhalden, Bevölkerungsexplosion, Kernkraftrisiken und dgl. mehr beherrscht wird.

Wirklichkeit verstehen durch Modellbildung

Mathematik zu lernen ohne einen Bezug zur Wirklichkeit ist wenig sinnvoll. Was aber bedeutet dabei "Wirklichkeit", und worin besteht der Bezug auf sie?

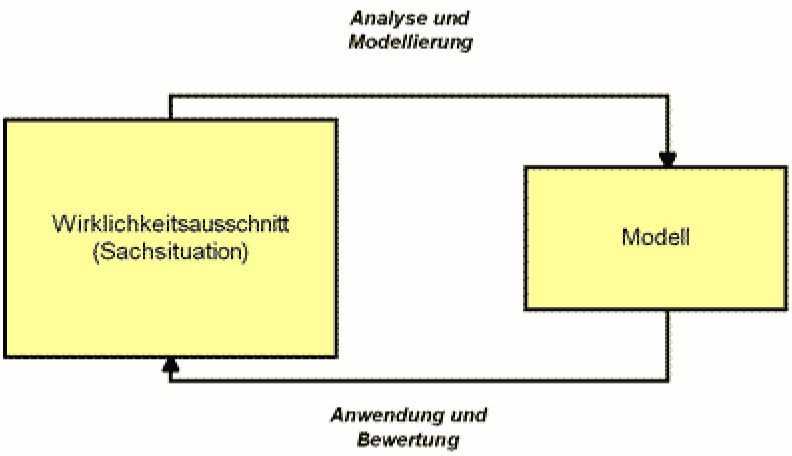
Mit einem gewissen Recht geht es im Unterricht beim Anwenden von Mathematik erst einmal um die Realität, die dem Lernenden als Umwelt und Erfahrungsbereich vertraut ist. Daran anzuknüpfen heißt aber nicht, ständig darin zu verharren und nicht auch andere Bereiche zu erschließen. Ein Konzept von Wirklichkeit, das dem vordergründig Gegebenen verhaftet bleibt oder einseitig auf Nützlichkeitsdenken beruht, würde zu kurz greifen. Es wird auch leicht übersehen, dass das, was wir Realität nennen, schon vorgängig und maßgeblich durch Begriffe – nicht selten mathematische Begriffe – gefiltert und vorgeprägt erscheint.

Den Bezug der Mathematik auf die Wirklichkeit leisten symbolische oder figürliche (strukturelle) Modelle, die in einer Analogiebeziehung zu einem realen Sachzusammenhang stehen.

Modellbildung

Ein typisches Anwendungsvorhaben beginnt mit einer gründlichen Analyse des Sachzusammenhangs; erst an deren Ende steht ein mathematisch formuliertes Modell. Oft handelt es sich dabei um ein System von Gleichungen (oder auch Ungleichungen) für die Vorgabe- und Zustandsgrößen, von denen das Geschehen im gewählten Realitätsausschnitt abhängt. Das Modell vereinfacht die Sachstruktur dieses Ausschnitts, muss sie aber mindestens so getreu abbilden, wie es der Zweck der Anwendung erfordert.

Die Lösung des Anwendungsproblems erfolgt im Modell. Danach wird sie in die Wirklichkeit "zurückgeholt", um sich dort zu bewähren. Tut sie das nicht oder nicht gut genug, so kann man versuchen, das Modell zu verbessern. Auf diese Weise schließt sich ein Zyklus aus Analyse, Modellierung, Anwendung und Bewertung:



Ein solcher formaler Apparat wird für die einfachen Modellbildungen, die auf der Sekundarstufe I in Betracht kommen, im allgemeinen nicht benötigt. Allerdings ist es, auch bei weniger komplexen Situationen, durchaus zu empfehlen, die Sachstruktur sorgfältig herauszuarbeiten und sich die dabei allmählich hervortretende Differenz zwischen Wirklichkeit und Wirklichkeitsbeschreibung (im Modell) bewußt zu machen. Die Realität wird auf der Modellebene *interpretiert*, um auf diese Weise besser verstanden (und beherrscht) zu werden.

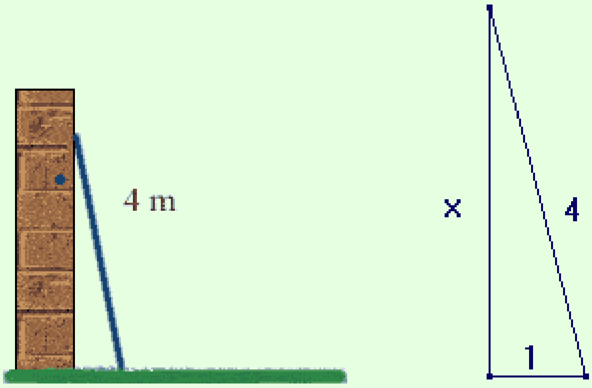
Zwei einfache Beispiele:

Beispiel 1

Man kann eine Gleichung als ein Modell auffassen, das eine Sachsituation in einer algebraischen (arithmetischen) Sprache beschreibt. Sind z.B. 72 DM auf Klaus und Peter so aufzuteilen, dass Peter doppelt soviel erhält wie Klaus, so lässt sich dies durch $x + 2x = 72$ wiedergeben. Dabei bedeutet x den Betrag, den Klaus erhält. Das "Modell" erlaubt auf einfache Weise auszurechnen, welche Beträge an Klaus und Peter gezahlt werden.

Beispiel 2

Auch geometrische Figuren können als Modelle realer Situationen dienen. Wird z.B. eine 4 m lange Leiter im Abstand von 1 m an eine Mauer gelehnt, so lässt sich dies durch ein rechtwinkliges Dreieck modellieren, dessen Hypotenuse der Leiter entspricht.



Die horizontale Kathete stellt den Abstand des Aufstützpunktes von der Mauer dar. Durch Messen oder Berechnen der anderen Kathete ermittelt man die gesuchte Höhe *x*, zu der die Leiter hinaufreicht.

An Beispiel 2 soll hier einmal die Frage überlegt werden, wie gut (genau, realitätstreu) ein Modell die gegebene Sachstruktur abbildet und wie sich dies auf die Qualität der damit erzielbaren Problemlösung auswirkt.

Beginnen wir bei den Maßangaben: Bedeutet ein Abstand von 1 m von der Mauer auf den Millimeter exakt 1,000 m, oder könnten es auch 0,95 m oder 1,03 m sein? Sieht man sich einmal den Fuß einer Gartenmauer sowie die Auflagestelle einer Leiter etwas näher an, so wird schnell klar, dass schon zentimetergenaue Werte nur mit Mühe zu erhalten sind. Das typische Modell, das diese Vorgaben realisiert, besteht in einer geometrisch *ähnlichen* Figur. Man kann ihr die gesuchte Größe durch Messung entnehmen. Dabei entsteht ein physikalischer Fehler. Er wird beeinflusst vom Maßstab der Figur und der Genauigkeit ihrer Konstruktion. Wird die Lösung hingegen berechnet, z.B. nach Pythagoras' Lehrsatz zu

$$x = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

so läuft das darauf hinaus, die Figur in ein algebraisches Modell (hier: eine quadratische Gleichung) zu übersetzen. Was bedeutet in diesem Fall die Lösung Ö15? Eine irrationale Zahl ist in einer realen Interpretation nicht zu fassen. Nicht einmal das rationale Anfangsstück der vom Taschenrechner angezeigten Ziffernfolge 3,8729833 darf man hier gedankenlos als "exakte" Lösung übernehmen.

In einem echten Anwendungsproblem müssten wir klären, welche der berechneten Ziffern signifikant sind und welcher sachlich vertretbare Wert sich daraus für die gesuchte Leiterhöhe ergibt. Kritisch betrachtet ist die Aufgabe aber wohl kaum mehr als ein (instruktives) Demonstrationsbeispiel eines "eingekleideten" Sachproblems. Wo in realer Alltagspraxis würde denn jemand eine Leiter in vorgegebenem Abstand an eine Mauer stellen, um sich dann zu fragen, bis zu welcher Höhe sie reicht? Vielleicht kommt man der Wirklichkeit etwas näher, wenn man z.B. allgemeiner nach einem günstigen Neigungswinkel fragt. Dadurch werden die beiden Katheten in Abhängkeit von Leiterlänge und Neigungswinkel festgelegt.

Zentrale Begriffe

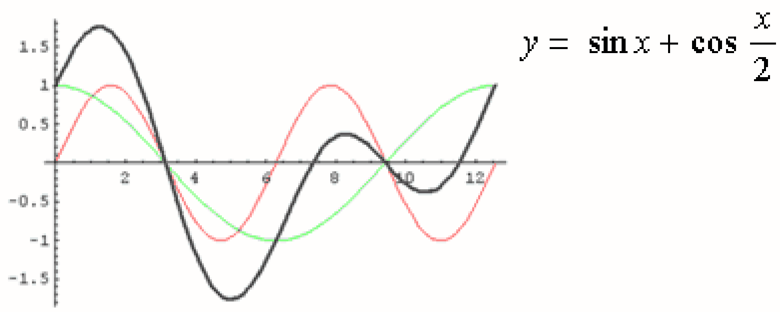
Um mit Anwendungsproblemen erfolgreich umgehen zu können, braucht man weniger einen Vorrat von Lösungsautomatismen für eingekleidete Aufgaben als vielmehr ein solides Verständnis zentraler Begriffe. Hier einige Leitideen, die bei der mathematischen Modellbildung immer wieder eine nützliche Rolle spielen:

- *Messen*

Bestimmung realer Größen durch möglichst einfache Analogmodelle (Maßstab, Winkelmesser, Federwaage etc.)

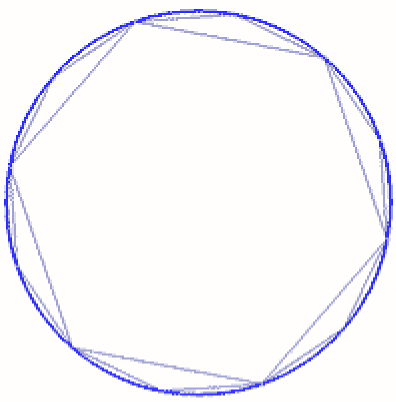
Das Messen ist Bindeglied zwischen Realität und Modell. Oft beruht es auf gewissen theoretischen Annahmen (z.B. dass sich ein Maßstab nicht ändert, wenn man ihn von einer Stelle zu einer anderen transportiert, oder – bei der Federwaage – der Proportionalität der Dehnung zum angehängten Gewicht). Zu den Spielarten des Messens gehören das Abzählen und das Schätzen einer empirisch gegebenen Ansammlung von Dingen.

- *Funktion(en)*
  Der Funktionsbegriff (die Idee der Abbildung) ist fundamental in der gesamten Mathematik. Funktionen – vor allem als Beschreibungsmittel für die Abhängigkeit zwischen Größen – sind vielseitig einsetzbare Bausteine, wenn es um die Modellierung realer Sachzusammenhänge geht. Als Beispiele seien hier nur genannt: Proportionalität (lineare Funktion), umgekehrte Proportionalität (Hyperbelfunktion), Wachstum und Zerfall (Exponentialfunktion), periodische Vorgänge (trigonometrische Funktionen und ihre Überlagerungen), Änderungsraten (Differentiation von Funktionen). Traditionell spielt das sog. funktionale Denken eine bedeutende Rolle (vgl. etwa Vollrath, H.-J.: Funktionales Denken. Journal für Mathematikdidaktik 10 (1989), 3-37).



Das Schaubild zeigt die additive Überlagerung (schwarz) der Sinusfunktion (rot) und einer Cosinusfunktion mit doppelt so langer Periode (grün).

- *Approximation*
  Angenäherte Bestimmung einer Größe (oft als Ersatz für ihren nicht zugänglichen exakten Wert). In einem weiteren Sinn bedeutet sie die Darstellung eines komplexen Objekts durch eine annähernde Folge einfacherer Objekte.



Approximation (Exhaustion) des Kreises durch regelmäßige Vielecke (hier der Eckenzahl 6, 12, ...).

Zum Beispiel wird die Zahl p durch den Dezimalbruch 3,14159... nicht nur näherungsweise wiedergegeben, sondern sie ist in gewissem Sinne selbst nicht anderes als eine schrittweise sich entfaltende Folge rationaler Zahlen. – Zu den (scheinbar) einfacheren Formen der Approximation gehört das Überschlagen bzw. Schätzen. (Die Modellbildung ihrerseits ist als eine approximative Beschreibung einer Sachsituation anzusehen.)

- *Optimierung*

> Ein durchgängiger Aspekt praktischer Anwendungen: Man fragt nach dem kürzesten Weg von A nach B, möchte Aktien billigst kaufen und bestens verkaufen, oder sucht eine Methode, bestimmte Dinge auf kleinstem Raum zu stauen, usw. Viele Naturerscheinungen – z.B. die Reflexion oder die Brechung von Lichtstrahlen – spielen sich so ab, als ob sie einem Extremalgesetz "gehorchten". Optimalität und Symmetrie (eine andere wichtige Grundidee) treten oft gekoppelt auf, etwa im Zusammenhang mit den isoperimetrischen Eigenschaften von Quadrat oder Kreis. Unter allen Rechtecken gleichen Umfangs besitzt das (symmetrische) Quadrat den größten Flächeninhalt.

Möglichkeiten, Anwendungsprobleme im Unterricht vor dem Hintergrund zentraler Ideen der Mathematik zu erschließen, werden eingehend erörtert in Humenberger, J.; Reichel, H. Ch.: *Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. BI-Wissenschaftsverlag: Mannheim 1995.

Beispiele für die Sekundarstufe I

Die folgende kleine Sammlung von Beispielen soll verdeutlichen, wie auf dem Niveau der Sekundarstufe I grundlegende (zentrale) Begriffe und Verfahren der Mathematik lebensweltlich verankert werden können. Der Tenor der Beispiele liegt weniger darin, mit mathematischen Methoden "Neues" zu entdecken (allenfalls im historischen Nachvollzug), als darin, bekannte Dinge und Erscheinungen des Alltags besser zu verstehen. Insofern gilt es auch einmal – wie im Beispiel "Von hundert auf null" – einen notorisch verkannten oder verdrängten (?) Sachaspekt in aufklärerisch-pädagogischer Absicht aufzudecken.

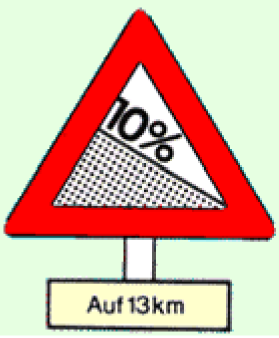
Es werden nur Skizzen gegeben bzw. die Angaben gemacht, die zum Verständnis der Sachsituation unerlässlich sind. Für eigene Aktivitäten soll genügend Raum bleiben. Gelegentliche Literaturhinweise oder mit *Mathematica* erstellte Notebook-Dateien mit Berechnungen und Schaubildern sollen zusätzliche Anregungen und Erläuterung geben.

Eine Fermi-Aufgabe

"Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?" – Fragen wie diese pflegte der berühmte Physiker Enrico Fermi (1901-1954) seinen Mitarbeitern zu stellen, wenn er morgens sein Labor betrat. Der Reiz solcher Aufgaben liegt in ihrer Offenheit; denn es ist keineswegs gemeint, man solle die gesuchte Anzahl bei der Gewerbeaufsicht nachfragen. Stattdessen geht es darum, eine Reihe plausibler Annahmen aufzustellen und so zu einer wirklichkeitsnahen Überschlagslösung zu gelangen.

Chicago hatte zum Zeitpunkt der Frage ca. 3 Millionen Einwohner. Wenn man annimmt, dass eine Durchschnittsfamilie aus 4 Personen besteht und in jedem dritten Haushalt ein Klavier steht, ergibt das 250.000 Klaviere. Wie oft muss ein Klavier gestimmt werden? Annahme: alle 10 Jahre. Pro Jahr macht das 25000 Stimmungen. Wenn wir schließlich unterstellen, ein Klavierstimmer schaffe es, am Tag 4 Klaviere zu stimmen, und das an 250 Arbeitstagen im Jahr, so sind das 1000 Stimmungen jährlich. Der Gesamtbedarf könnte also durch 25 Klavierstimmer gedeckt werden. Vielleicht gibt es ja nur 15, oder es herrscht gar ein Überangebot von 50. Die Größenordnung dürfte aber getroffen sein.

Die Steigung einer Straße



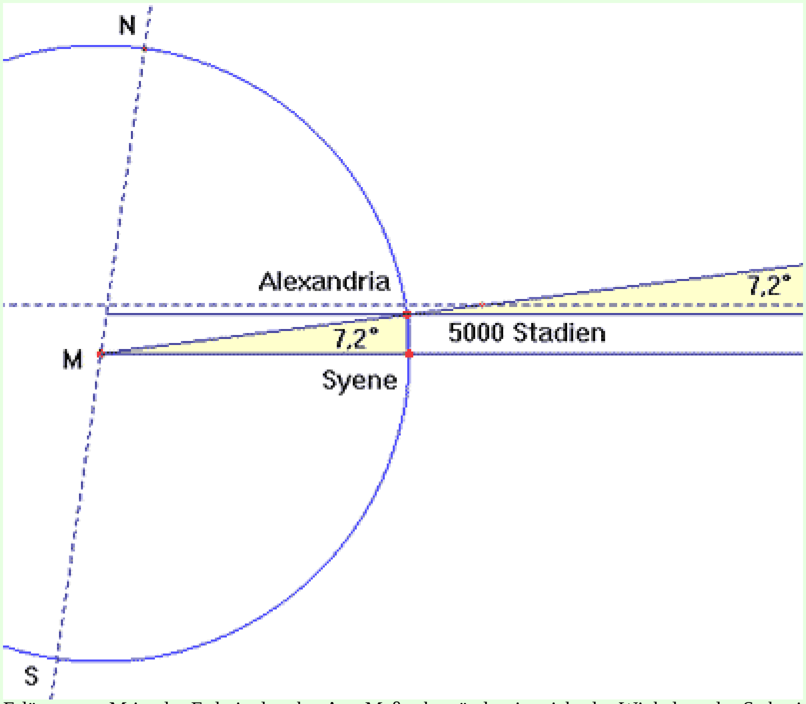
Ausgangspunkt ist dieses bekannte Verkehrszeichen zur Anzeige einer Straßensteigung.

Mit den folgenden Fragen Teilaufgaben und Aktivitäten lässt sich eine Übungssequenz für das 9./10. Schuljahr gestalten, in der es darum geht, den (als bekannt vorausgesetzten) Satz des Pythagoras auf eine Alltagssituation anzuwenden.

- Was bedeutet die Aufschrift (10 % auf 13 km)?
- Hauptfragen: Wie groß ist der Höhenunterschied *h*? die Fahrtstrecke *s*? die Horizontalentfernung *w*? der Steigungswinkel?
- Suche ein rechtwinkliges Dreieck in dieser Situation (Steigungsdreieck mit den Katheten *w* und *h*).
- Was liefert die Angabe 10 %? (Verhältnis $h : w = 1 : 10$)
- Was liefert der "Pythagoras"? (Gleichung $h^2 + 13^2 = s^2$)
- Rechnerische und zeichnerische Ermittlung von *h* und *s*. Diskussion der Ergebnisse.
- Untersuche Abhängigkeiten (z.B. *h* als Funktion der Steigung), verfertige dazu Tabellen und Funktionsschaubilder.
- Untersuche Spezialfälle (Steigungswinkel 30°, 45°, 60°). Welche realistischen Steigungen gibt es? (Rhein bei Basel 0,08 %, Gotthardstraße 13 %, Oberstdorfer Sprungschanze 53 %)
- Wie kann der Steigungswinkel bestimmt werden? (Entdeckung des Tangens)
- Wie lassen sich große Höhenunterschiede bei vorgegebener Höchststeigung überbrücken? (Aufgeben von Geradlinigkeit, z.B. durch Aufwickeln des Steigungsdreiecks auf einen – gedachten – Zylinder; von hier aus zahlreiche weitere Fragen über Wendelstrecken und -treppen und Länge der zugehörigen Schraubenlinie)

Die Größe der Erde

Im 3. Jahrhundert v. Chr. schätzte Eratosthenes den Umfang der Erde mit einfachsten Mitteln: Er setzte die Kugelgestalt der Erde voraus, betrachtete die einfallenden Strahlen der Sonne als parallel und berechnete den Erdumfang aus Angaben über den Sonnenstand an zwei Orten bekannter Entfernung (Alexandria Ax und Syene Sy, südlich von Ax auf dem nördlichen Winkelkreis gelegen).



Erläuterung: M ist der Erdmittelpunkt. Aus Maßstabsgründen ist nicht der Winkel an der Stabspitze in Ax, sondern sein Scheitelwinkel kenntlich gemacht. – Die in der Antike bekannten 5000 Stadien (Entfernung von Ax nach Sy) entsprechen ca $5000 \cdot 160$ m = 800000 m.

Im Kern handelt es sich um eine einfache *Ähnlichkeitbetrachtung*. Am Tag der Sommersonnenwende fällt zur Mittagszeit in Sy der Sonnenstrahl senkrecht in einen Brunnen; zur selben Zeit wirft ein senkrecht in Ax aufgestellter Stab einen Schatten. Der zugehörige Winkel, dessen Scheitel die

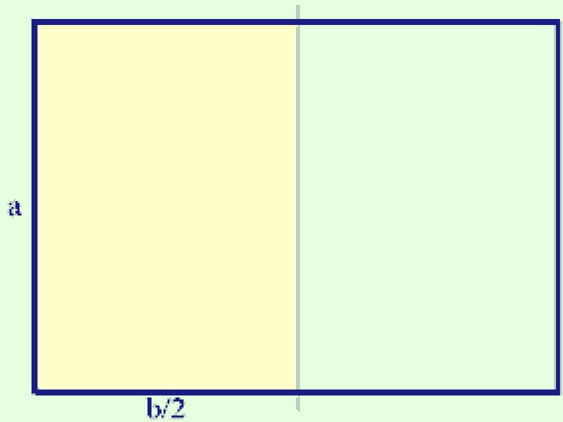
Stabspitze bildet, ist aus Schattenlänge und Stabhöhe ermittelbar und beträgt 7,2º (im Bogenmaß: 1/50). Der Winkel bei M beträgt (als Wechselwinkel an Parallelen) ebenfalls 7,2º und gehört somit zu einem Bogenstück, das den 50-ten Teil des Erdumfangs ausmacht. Dieser ergibt sich also zu 50 · 800000 m = 40000 km, was verblüffend genau ist. Das Beispiel zeigt eindrucksvoll die Kraft einer guten (zudem leicht nachvollziehbaren) Idee.

Vgl. ergänzend hierzu [Freudenthal, H.: *Mathematik in Wissenschaft und Alltag*. Kindler Verlag: München 1968, S. 16-19], [Otte, M.; Steinbring, H.; Stowasser, R.: *Mathematik die uns angeht*. Bertelsmann Lexikon-Verlag: Gütersloh 1977, S. 100-101].

Papierformate nach DIN

Die nach DIN genormten rechteckigen Papierformate A0, A1, A2, A3, A4, usw. sind vom alltäglichen Gebrauch in Schule, Haushalt oder Büro bekannt. Sie werden durch die Forderung festgelegt:

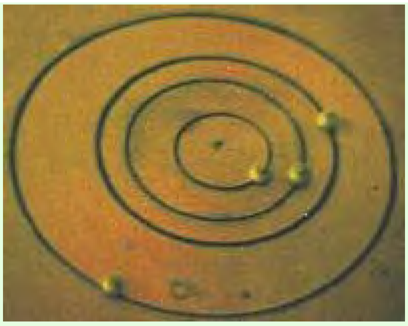
Faltet man ein Blatt in der Mitte der längeren Seite, so entstehen zwei DIN-Rechtecke der nächsthöheren Stufe. Das A0-Rechteck hat den Flächeninhalt 1 m^2.



Aus einfachen Ähnlichkeitsbetrachtungen – es gilt: $a : b = (b/2) : a$ – ergibt sich das Verhältnis $a : b$ = *Kurzseite* : *Langseite* = 1 : (Quadratwurzel aus 2). Insbesondere sind alle DIN-Blätter ähnlich.

Huygens' Planetarium

Der niederländische Physiker, Mathematiker und Astronom Christiaan Huygens hat im Jahre 1680 die Zähneanzahl zweier Zahnräder bestimmt, über die Erde und Saturn in einem mechanischen Modell des Sonnensystems angetrieben werden.



Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Himmelskörper bei ihrem Umlauf um die Sonne war zunächst zu 77708431 : 2640858 gemessen worden. Zahnräder können aus praktischen Gründen nicht allzu viele Zähne besitzen; das Verhältnis muss daher so gut wie möglich angenähert werden. Man könnte es (ein wenig naiv) zunächst wie folgt versuchen: 77700000 : 2600000 = 777 : 26. Eine Anzahl von 777 Zähnen ist aber für ein reales Zahnrad immer noch zu groß. Außerdem ist bei dieser Lösung bereits nach etwa zweieinhalb Erdumläufen der Fehler so angewachsen, dass zur Korrektur 1 Zahn weitergeschaltet werden muss.

Durch geschickte Bruchrechnung (Entwicklung in einen Kettenbruch) hat Huygens eine wesentlich bessere Näherung gefunden, die sich zudem für den Bau eines mechanischen Modells eignet:

$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + \frac{1123549}{2640858}$$

$$= 29 + \frac{1}{\frac{2640858}{1123549}} = 29 + \frac{1}{2 + \frac{393760}{1123549}}$$

$$= 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{1123549}{393760}}} = 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{336029}{393760}}}$$

$$= 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \ldots}}} \approx 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{206}{7}$$

Die Auslassungspunkte ... deuten an, dass Huygens an dieser Stelle abbricht, d.h. den betreffenden Teilbruch vernachlässigt. Dieser zweite Ansatz liefert ein einfacheres, zugleich viel genaueres Ergebnis. Eine Weiterschaltung um 1 Zahn ist erst nach etwa 1346 Erdumläufen erforderlich.

Vgl. ergänzend hierzu [Otte, M.; Steinbring, H.; Stowasser, R.: *Mathematik die uns angeht*. Bertelsmann Lexikon-Verlag: Gütersloh 1977, S. 68-69] sowie [Neubrand, M.: Kettenbrüche – Beste Näherungen, transzendente Zahlen. *Der Mathematikunterricht* 30/5 (1984), 30-47].

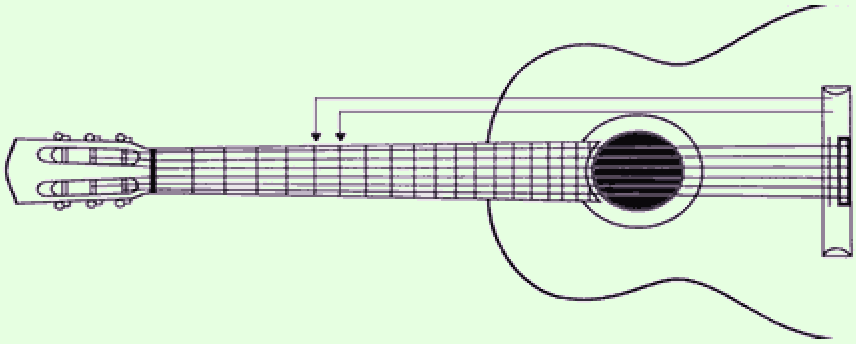
Zwerge und Riesen

Sachlicher Ausgangspunkt: die ungleichen Fähigkeiten und Bedingungen kleiner und großer Lebewesen (Floh, Elefant). Was würde geschehen, wenn ein kleines Tier sich maßstabgerecht vergrößerte? Geometrische Ähnlichkeit liefert zu dieser Frage den begrifflichen Hintergrund. Ein linearer Ähnlichkeitsfaktor k verändert eine Fläche um den Faktor k^2, ein Volumen um den Faktor k^3. Daraus lassen sich interessante Einsichten gewinnen über Massigkeit und Beweglichkeit von Lebewesen, auch über die Festigkeit (Belastbarkeit) ihrer Knochen.

Allgemeinverständlich ist dies in [Menninger, K.: *Mathematik in deiner Welt. Von ihrem Geist und* *ihrer Art zu denken*. Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1954, S. 16-24] dargestellt.

Das Griffbrett der Gitarre

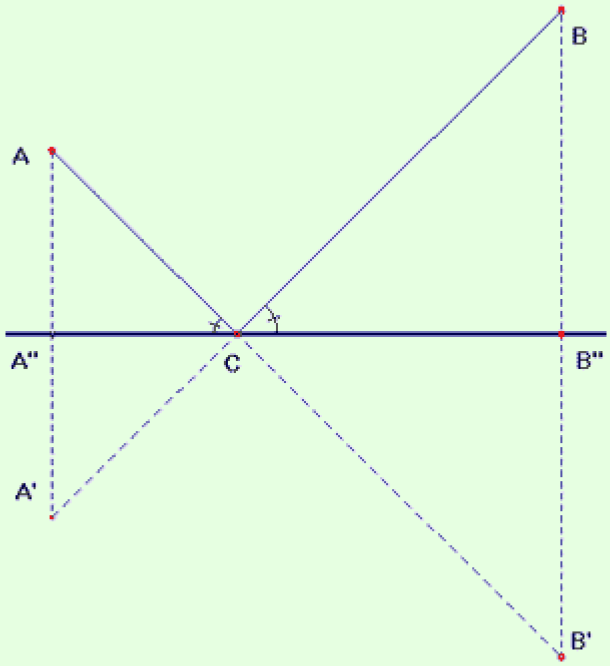
Die Saiten einer Gitarre werden – anders als etwa bei einer Violine – über Bünde abgegriffen. Schon dem Augenschein nach werden – vom Sattel aus betrachtet – die Bundabstände immer kleiner.



Warum ist das so? Die Ungleichheit der Abstände scheint der empfindungsmäßigen Gleichheit der Halbton-Intervalle zu widersprechen. Hintergrund: Intervalle (Tonhöhenabstände) werden durch Frequenzverhältnisse realisiert (und damit als Längenverhältnisse an der schwingenden Saite). Will man eine Oktave, d.h. das Verhältnis 1:2, in 12 gleiche Tonschritte einteilen (sog. *wohltemperierte* Skala), so müssen aufeinanderfolgende Steg-Bund-Abstände eine geometrische Folge (mit dem Quotienten w = $2^{1/12 =}$ 1,05946...) bilden.

Der Weg des Lichts

Ein vom Punkt A ausgehender Lichtstrahl soll nach Reflexion an einer Wand den Punkt B treffen. Auf welchen Punkt C der Wand muss er gerichtet werden? Die Situation lässt sich auch als Billard-Aufgabe fassen.



Die Figur zeigt eine Gerade g und einen Streckenzug A,C,B mit C auf der Geraden g. Zusätzlich sind die Lote von A und B auf g, ihre Lotpunkte A" und B" sowie die Spiegelpunkte A' und B' eingezeichnet. AB' und A'B schneiden beide die Gerade g im Punkt C. Aufgrund der Symmetrie (Spiegelung an g) erkennt man, dass der so konstruierte Streckenzug A,C,B das Reflexionsgesetz erfüllt:

Einfallswinkel = Ausfallswinkel

Dabei gilt folgende Extremalaussage: A,C,B hat minimale Länge unter allen Streckenzügen A,X,B, für die X auf g liegt (warum?).

Von hundert auf null

Eine wichtige Sachgrundlage in der Diskussion um Tempolimits (in Wohngebieten, auf der Autobahn) ist die Kenntnis des Geschwindigkeitsverlaufs entlang des Bremswegs eines Autos. Man erhält bereits ein brauchbares, d.h. hinreichend gut approximierendes Modell, wenn eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung angenommen wird. Über der Zeitachse ist die Restgeschwindigkeit $v(t)$ eine linear fallende Funktion von t (Gerade). In Abhängigkeit vom Bremsweg s erhält man dagegen die quadratische Beziehung $v^2 = v_0{}^2 + 2as$ (wobei a = Bremsbeschleunigung < 0). Hieraus ergeben sich bemerkenswerte Einsichten, z.B.: doppelte Geschwindigkeit bedeutet vierfachen Bremsweg.

Eingehende Vorschläge für die unterrichtliche Aufbereitung dieses Themas findet man in [Winter, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. (Kapitel 9: Kreativität und Problemlösen) 1. Aufl. 1989, 2. verb. Aufl. Vieweg: Braunschweig 1991, S. 220-227].

Die Tiefe eines Brunnens

Die folgende (Newton zugeschriebene) Aufgabe liefert ein schönes Beispiel für die Kraft der algebraischen Sprache bei der Modellbildung: Man lässt einen Stein in einen Brunnen fallen. Nach kurzer Zeit – sagen wir: 4 Sekunden – ist zu hören, dass er ins Wasser fällt. Kann man hieraus auf die Tiefe des Brunnens schliessen? Dies ist – bei Kenntnis der Fallbeschleunigung und der Schallgeschwindigkeit – in der Tat möglich, indem die Brunnentiefe x einmal als Fallstrecke des Steins und das andere Mal als Weglänge des Schalls ausgedrückt wird. Es entsteht eine quadratische Gleichung für x. Zur Lösung der Aufgabe gehört auch eine Überlegung hinsichtlich der anzustrebenden Genauigkeit.

Ergänzende Materialien

Zit. nach H. Neunzert: Von Modellen und wie man sie nutzt; in: Friemel, H.-J. et al. (Hrsg.): *Forum* '90 – *Wissenschaft und Technik*. Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg 1990, 10-21

A. L. Crelle war preußischer Oberbaurat und Gründer des ältesten deutschen Mathematik-Journals (im 19. Jahrhundert).

Anwendung der Mathematik auf das Bauwesen

"Eine ersprießliche und naturgemäße Anwendung der Mathematik auf das Bauwesen kann schon nicht anders als von jemand gemacht werden, der Mathematiker und Practiker, beides in zureichendem Umfange, zugleich ist. Aber auch das reicht noch nicht hin, und die Anwendung kann dennoch wenig naturgemäß ausfallen, wenn ein Drittes fehlt, welches beide Arten von Kenntnissen und Einsichten, die theoretischen und practischen, gleichsam beherrscht und lenkt. Dieses Dritte ist ein eigenthümliches Talent, die Gegenstände der Praxis mathematisch zu erfassen und zu durchschauen, und die Mathematik nur so wirken zu lassen, wie sie es bei der Natur complizirter Dinge vermag: in die Erscheinungen nicht bloß mathematische Formeln zu bringen, sondern sie mit mathematischem Geist zu durchschauen und zu durchdringen."

Aus: Becker 1979 [Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I], 9 und 20

Zum Konzept eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts

Wenn bei der nun einsetzenden Besinnung auf die Anwendungen von Mathematik und deren Bedeutung für den mathematischen Unterricht die Fehler und Einseitigkeiten vermieden werden sollen, die bei der Neuen Mathematik und dem lernzielorientierten Unterricht aufgetretenen sind, darf das Konzept [...] nicht wieder theoretisch oder ideologisch so überfrachtet werden, daß man dabei in die Gefahr gerät, an der Praxis vorbei zu reformieren. Das bedeutet vor allem, daß Vorschläge zur Einbeziehung von Anwendungen der Mathematik in den Unterricht sich an bestehenden Bedingungen der Schulpraxis, an bestehenden Lehrplänen, an organisatorischen Gepflogenheiten und Möglichkeiten der Schulpraxis auszurichten und auf wohldosierte Änderungen zu beschränken haben. [...] Das braucht nicht zu bedeuten, daß die Hereinnahme von Anwendungen in den Mathematikunterricht sich wieder nur beschränken müßte auf lebensferne Pseudoprobleme, unechte Anwendungen oder einen lehrmäßig zurechtgemachten Kanon von Anwendungen.
[...]
Es gibt nur wenige mathematisch hinreichend reichhaltige Sachzusammenhänge, die den Schüler unmittelbar in seiner aktuellen Situation betreffen. Hierin liegt eine grundsätzliche Schwäche eines noch so realitätsnah gestalteten Mathematikunterrichts. Auch Situationen aus dem möglichen späteren Erfahrungsbereich der Schüler, z.B. in nachfolgenden Klassenstufen, nach der Schule, als Auszubildender, als Erwachsener, brauchen für ihn in der aktuellen Situation noch nicht von Bedeutung zu sein und als ihn betreffend empfunden zu werden.

Aus: Menninger 1954 [Mathematik in deiner Welt], 3

Mathematik begegnet uns überall

Wir schreiben auf Dinformat und tippen im Toto, wir mahlen den Kaffee und sausen im Wagen durch die Kurven der Autobahn, wir bauen schwindelnde Brücken und versichern unser Leben, wir lassen unser Geld auf der Sparkasse wachsen und auf der Spielbank abnehmen, wir schimpfen auf die Statistik und können ohne sie nicht leben, wir wissen, daß der Zufall unser Leben beherrscht, aber wie alles Irdische selbst auch einem Gesetz untertan ist; und manchmal wundern wir uns, was ein Floh für Sprünge machen kann, aber der Elefant und wir nicht. Wirklich überall treffen wir auf den "mathematischen" Geist in unserem Leben, aber verschwommen bleibt uns meistens, was er ist, wie er denkt und wie er wirkt.

Aufgabe

In dem Kinderbuch *Das Fenster und andere Bilder* (von Günter Schulte und Anne Blume) findet sich folgende Passage:

> *Der Tisch muß alles tragen, was du täglich*
> *in deinen Bauch stopfst. Stell dir bloß*
> *einmal vor, wieviel Brote du in deinem*
> *Leben noch essen wirst. Der arme Tisch*!

Grafik: Anne Blume 1974

Folgen Sie diesem Denkanstoß nach allen Seiten hin durch geeignete Fragen und sachkundliche Aktivitäten. Erschließen Sie auf diese Weise die Sachsituation für eine Unterrichtsstunde mit Grundschulkindern. (Sie können sich dabei am Stil der Fermi-Aufgaben orientieren.)
