Mathematik als Darstellungs- und Gestaltungsmittel (Skizze)

Erklärung und Abgrenzung des Themas

Die meisten Menschen glauben, die Mathematik diene ausschließlich der Berechnung irgendwelcher Größen. Dabei wird übersehen, dass zu ihren Aufgaben und Möglichkeiten auch *Formgebung* im weiteren Sinne gehört. Formgebung hat eine deskriptive und eine präskriptive Seite. Dabei soll hier unter *deskriptiver* Formgebung die visuelle Darstellung von Daten (Objekten, Sachverhalten — auch solchen, die nicht zur Mathematik gehören) verstanden werden. Demgegenüber zielt die *präskriptive* Formgebung auf die Herstellung einer bestimmten Form (auch materiell), läuft also darauf hinaus, dass wir gestaltend in die Wirklichkeit eingreifen. Von beiden Aspekten (Darstellung und Herstellung) soll im Folgenden in didaktischer Hinsicht die Rede sein.

Die Behandlungsweise des Themas ist hier, bedingt durch den engen Zeitrahmen der "Grundzüge der Mathematikdidaktik", überblicksartig. Das wird dadurch wieder ausgeglichen, dass in der Veranstaltung "Anwendungen der Mathematik / Modellbildung" eine Reihe von Beispielen auch in ihren Einzelheiten durchgeführt werden.

Zur Abgrenzung: Nicht (oder jedenfalls nicht in erster Linie) geht es um die innermathematische Verwendung bildhafter Vorstellungen, etwa beim anschauungsgebundenen Schließen bzw. visuellen Beweisen ("proofs without words"). Dieses komplexe Spezialthema sprengt den Rahmen der allgemeinen Visualisierung, nicht zuletzt durch seine tieferliegenden Beziehungen zur Logik, Heuristik und Erkenntnistheorie.

Darstellung durch Mathematik

Begriff und Bedeutung der Visualisierung

Visualisierung steht hier als Sammelbegriff für die Verwendung bildhafter, anschaulicher Vorstellungen zur Beschreibung bzw. Darstellung von i.a. außermathematischen Objekten (Daten) und ihren Beziehungen. Sie erlebt, nicht zuletzt durch den Computer als Hilfsmittel der Bilderzeugung, als Visualistik oder "Visual Computing" eine rasch wachsende Bedeutung in zahlreichen Gebieten: Ingenieurswissenschaften, Medizin, Statistik etc.

Auch im Mathematikunterricht sollten Tätigkeiten wie diese mehr Beachtung finden:

- zu gegebenen Daten eine passende Darstellungsform finden
- vorliegende visuelle Darstellungen richtig "lesen" und interpretieren
- visuelle Darstellungen kritisch beurteilen

Hinweise zu grundlegender Literatur über Visualisierung

Einen Einblick in aktuelle Anwendungsbereiche in Mathematik, Technik und Kunst vermittelt Dress, A.; Jäger, G. (Hrsg.): *Visualisierung in Mathematik, Technik und Kunst. Grundlagen und Anwendungen*. Vieweg: Braunschweig; Wiesbaden 1999. Grundlagen und allgemeine Methoden der Visualisierung als eigenständige Disziplin findet man in Schumann, H.; Müller, W.: *Visualisierung. Grundlagen und allgemeine Methoden*. Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg 2000. Auf das Potential und die Bedeutung in didaktischer Hinsicht geht Fischer, R; Malle, G.: *Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Bibliographisches Institut: Mannheim 1985 (in Kapitel 6: "Mathematik als Darstellungsmittel") ausführlich ein. Eine didaktisch ausgerichtete Diskussion zur Rolle der Anschauung bzw. Anschaulichkeit im Erkenntnisprozess liefert Fischbein, E.: *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. D. Reidel: Dordrecht; Bosten; Lancaster; Tokyo 1994. Eine Erörterung des Zusammenhangs von Sinneswahrnehmung und Denken (u.a. auf dem Gebiet der ästhetischen Erziehung) hat Arnheim, R.: *Anschauliches Denken. Zur Einheit von Bild und Begriff*. DuMont Buchverlag: Köln 1977 beigesteuert.

Zwecke der Visualisierung

Es folgt eine summarische (keineswegs vollständige) Auflistung möglicher Ziele und Absichten von bildlichen Darstellungen. Die einzelnen Items sind nicht sämtlich überschneidungsfrei.

- Information (durch Präsentation)
- Kommunikation
- Erleichterung des Verständnisses von komplexen Zusammenhängen
- explorative Analyse von vorliegenden Daten(mengen)
- konfirmative Analyse in Entscheidungssituationen
- Erweiterung von Denk- und Operationsmöglichkeiten

Beispiele mathematischer Darstellungsformen

Es lassen sich zwei extreme Grundtypen bildhafter Darstellungen unterscheiden:

- *analogische* Darstellungen
  (ikonisch, abbildend, ähnlich: z.B. Bild eines Moleküls, Storyboard-Skizze für eine Filmszene)
- *symbolische* Darstellungen
  (durch Konvention zustande gekommen: z.B. Verkehrsschilder, chemische bzw. mathematische Formel)

Dazwischen liegen schematisierende, strukturierende Darstellungen (z.B. der Photosynthese, chemische Strukturformel, Soziogramme, Stammbäume).

Für visuelle Darstellungen im engeren Sinne bieten sich vor allem analogische Abbildungen und ihnen nahestehende Verwandte (Schemabilder und Diagramme aller Art) an. Hier sollen die folgenden, auch unter didaktischen Gesichtspunkten wichtigen mathematischen Darstellungsformen genannt werden:

- Struktur-Diagramme
- Kartesische Diagramme
- Statistische Diagramme

Struktur-Diagramme

In diese Kategorie fallen zahlreiche Abbildungstypen, die in Logik und Informatik seit langem mit Erfolg angewendet werden, allen voran Baum- und Flussdiagramme. *Baumdiagramme* sind universell einsetzbar, z.B. um die hierarchische Abhängigkeit von Begriffen darzustellen, aber auch den Aufbau einer Organisation, den Aufbau von Rechenausdrücken bzw. Formeln, gestufte Entscheidungsprozesse, u.v.a.m. *Flussdiagramme* eignen sich zur Darstellung von Abläufen ("logische Flüsse"), in denen Sequenzen, Verzweigungen und Schleifen vorkommen. Algorithmen lassen sich durch Flussdiagramme abbilden.

Daneben existiert eine Vielzahl anderer Schematen, z.B. Euler-Venn-Diagramme zur Darstellung von Begriffsumfängen und ihren inklusiven Beziehungen, Ordnungsdiagramme (nach Hasse), Karnaugh-Veitch-Diagramme (für den Wertverlauf Boolescher Funktionen), etc.

Kartesische Diagramme

Hierunter sind Punktmengen zu verstehen, die in ein —zwei- oder dreidimensionales— rechtwinkliges Koordinatensystem eingezeichnet werden. Üblich sind Funktionsgraphen, um die funktionale Abhängigkeit zweier reellwertiger Größen, z.B. Weg in Abhängigkeit von Zeit, darzustellen, häufig aber auch Kurven als geometrischer Ort (Menge) aller Zustände (x, y) eines Systems (Zustandsdiagramme).

Statistische Diagramme

Es gibt eine Fülle zweckspezifischer Diagrammformen zur übersichtlichen Darstellung statistischer und sonstiger Beobachtungsdaten. Hier nur die wichtigsten Elementartypen:

- Punktdiagramme
- Liniendiagramme
- Säulendiagramme
- Histogramme
- Kreisdiagramme

Die sog. Explorative Datenanalyse (EDA) verfolgt darüberhinaus den Ansatz, die graphische Aufbereitung des Datenmaterials systematisch zur Gewinnung von Einsichten zu nutzen (vgl. Biehler, R.: *Explorative Datenanalyse*. Materialien und Studien aus dem IDM, Bd. 24: 1982). Dazu wurden spezielle Diagrammtypen entwickelt, desgleichen Software-Werkzeuge, welche die Erzeugung und Untersuchung derartiger Graphen unterstützen (z.B. *Vista* von Forrest W. Young).

Bedeutung für den Mathematikunterricht

Die Rolle visueller Darstellungen im Unterricht erschöpft sich bei weitem nicht in der eines Hilfsmittels, mit dem sich abstrakte oder sonstwie schwer zu durchschauende Sachverhalte veranschaulichen lassen. Vielmehr entfalten sie ihr didaktisches Potential vor allem dann, wenn a) aus ihnen Erkenntnisse herausgelesen werden sollen oder wenn b) die Veränderungen eines bestimmten Systems oder einer Situation in einem passenden Diagramm abzubilden sind. Die damit verbundenen Aufgaben sind im Mathematikunterricht bisher noch nicht etabliert oder nur in schwachen Ansätzen vertreten. Noch viel zu stark wirkt sich die herkömmliche Auffassung von Mathematik als einer rechnenden Disziplin aus. Beim Umgang mit visuellen Darstellungen kommt hinzu, dass häufig keine völlig eindeutigen Lösungen ableitbar sind.

Die folgenden Beispiele sollen die so verstandene didaktische Rolle visueller Darstellungen verdeutlichen:

Graphische Fahrpläne (Weg-Zeit-Diagramm)

Mittelwerte finden (im Diagramm einer Verteilung)

Bewegung darstellen (Ort-Geschwindigkeit-Graph)

Gestaltung von Wirklichkeit

Formgebung in der physischen Wirklichkeit geschieht nicht allein und schon gar nicht vorrangig nach mathematischen bzw. geometrischen Gesichtspunkten, sondern nach funktionellen Vorgaben (und unter physikalischen und technischen Nebenbedingungen). Ein Großteil der geometrischen Formen, die uns in der Alltagswelt und in technischen Zusammenhängen begegnen, ist nicht naturwüchsig —"Quader wachsen nicht auf Bäumen". Vielmehr handelt es sich um Artefakte, um von Menschen hergestellte Gegenstände. Ihre Form (geometrische Gestalt) wird —der Finalität von Technik entsprechend— an Zwecke gebunden bzw. aus Zwecken abgeleitet.

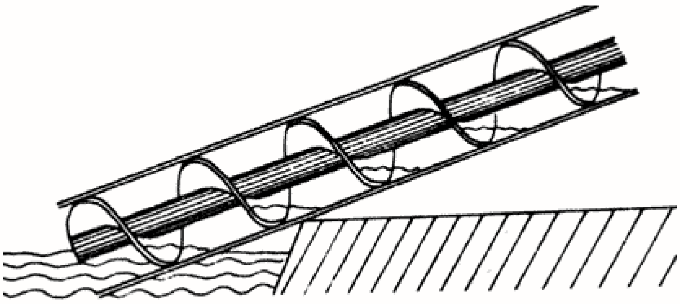
Die Studie Bender/Schreiber 1985 hat die "operative Genese der Geometrie" zum Thema, d.h. die Frage, wie sich geometrische Begriffe aus den praktisch-technischen Zweckbestimmungen durch Herstellungshandlungen (Operationen) entwickeln oder zumindest interpretieren lassen.

Neben Zweckformen im engeren Sinne treten Kunstformen, deren "Zweck" nicht im Praktischen, sondern im Ästhetischen liegt. Häufig erscheinen sie als zweckfreie Zugabe zu funktioneller Gestaltung; Beispiele dafür sind ornamentale Verzierungen an Gebäuden, Gebrauchsgegenständen oder technischen Objekten. Eine einflussreiche Schule des Design (vor allem in der Architektur, z.B. Le Corbusier) vertrat allerdings das Prinzip: *Form follows function*.

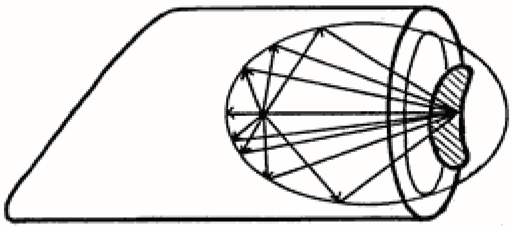
Zweckformen

Aufzählung einiger Beispiele:

- Quader (Ziegelstein)
- Zylinder (Rad)
- Kegelstumpf (Blumentopf)
- Schraubenlinie/fläche (Wendeltreppe, Korkenzieher, *Archimedische Schnecke*)



- Parabel (Parabolspiegel)
- Ellipse (*Nierensteinzertrümmerer*)



- Kettenlinie (bei Hängebrücken)
- Klothoide (im Straßenbau)

Kunstformen

Aufzählung einiger Beispiele:

- Rosetten (z.B. *Fensterrosetten*)

Abbaye d'Hauterive (CH-1725 Posieux)
Rosaces du cloître XIVe siècle

bei Fribourg/CH
(Foto von Benno Artmann zur Verfügung gestellt)

- Bandornamemte
- Parkette, Flächenornamente
- sonstige Varianten von Symmetrie