Kontexte für entdeckendes Lernen

Kontexte: Anregungen zur Eigentätigkeit

Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht lebt von anregenden, herausfordernden Sachsituationen. Die im folgenden beschriebenen Kontext-Beispiele – ausnahmslos zu bekannten, klassischen Themen – bilden eine in dieser Hinsicht ergiebige Quelle. Die Art der Darbietung richtet sich an einen erwachsenen Adressaten; dabei wird das Material absichtlich knapp beschrieben, und viele der aufgeworfenen Fragen bleiben dem Studierenden zur Beantwortung überlassen. So bleibt die Gelegenheit, sich auf eigene Faust mit der Sache zu beschäftigen, persönliche Interessenschwerpunkte zu entwickeln, neue Fragen zu erfinden und den Stoff später immer wieder einmal vorzunehmen.

> **Nur wer für sich ein aktives Verhältnis zu diesen oder ähnlichen Themen entwickelt und sie gleichsam "von innen her" sieht, kann hoffen, damit im Unterricht erfolgreich zu sein.**

Die vorgestellten Kontexte eignen sich in hohem Maße für entdeckendes Lernen: Sie beruhen auf einfachen, im Prinzip vertrauten und leicht fasslichen Strukturen, z.B. Figuren aus Plättchen, Karomuster, Vielecke. Zugleich bergen sie eine beachtliche Fülle von Beziehungen, die es erst einmal zu erforschen gilt. Einige Themen, wie Punktmuster und Quadratgitter, erlauben über weite Strecken eine enge Wechselwirkung von geometrischen und arithmetischen Aspekten, von Form und Zahl. Nicht selten bieten die Kontexte zusätzlich reichhaltige Übungsmöglichkeiten.

Punktmuster

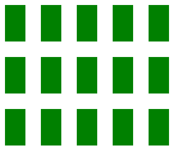
Figuren und Muster, die man auf ebener Unterlage aus Plättchen legen kann, sind ein seit alters her bewährtes Darstellungsmittel für die natürlichen Zahlen. Vom lateinischen *calculus* (= kleiner Kalkstein) leiten sich die Wörter "Kalkül" und "kalkulieren" ab. Das Material ist einfach, homogen und geeignet für handlungsgebundenes Lernen; es kann bereits im Unterricht der Grundschule gewinnbringend eingesetzt werden [vgl. dazu etwa Müller, G.; Wittmann, E.: *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. 2., durchges. Aufl. Vieweg: Braunschweig 1978, S. 215-221].

Die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... erscheint in der einfachsten Gestalt als fortsetzbare Reihe (Zeile) von Plättchen:

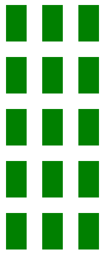
Das Addieren und Subtrahieren so dargestellter Zahlen geschieht durch Anhängen zweier Reihen oder Wegnehmen von Endstücken.

Die hier gelegten 15 Plättchen können auch anders angeordnet werden, z.B. als ein Rechteck, welches das Produkt

3 × 5 veranschaulicht:



Dieses Rechteck stellt das Produkt 5 × 3 dar:



Die Anzahl der Plättchen hat sich hierbei nicht geändert. Das entspricht dem Kommutativgesetz der Multiplikation.

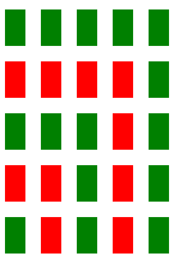
Aufgabe: Eine gegebene Zahl soll auf möglichst viele Arten als Rechteck gelegt werden.

Wird diese Aktivität offen und aufmerksam angegangen, ergeben sich eine Reihe von Fragen bzw. Beobachtungen, zum Beispiel:

- Gibt es immer wenigstens ein Rechteck?
- Manchmal entstehen auch Quadrate.
- Was sind das für Zahlen, die nur in einer Einzelzeile aufgehen?
- Wenn Zeilen fester Länge gelegt werden – wie viele Plättchen bleiben (höchstens) übrig?

Damit hat man einen natürlichen Zugang zu den Begriffen Teiler (direkt in Verbindung mit Komplementärteiler), Primzahl, Quadratzahl und zur Division mit Rest.

Aufschlussreich ist der Entstehungsprozess figurierter Zahlen. Zum Beispiel kann man sich ein Quadrat wie folgt entstanden denken: Es wird 1 Plättchen hingelegt (grün), dann ein Winkel aus 3 Plättchen angelegt (rot), dann ein Winkel aus 5 Plättchen (grün), usw.:

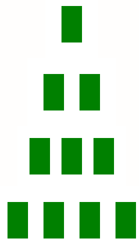


Die Summe der ersten aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist demnach eine Quadratzahl:

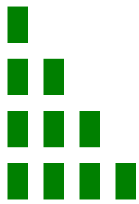
$$1 + 3 + 5 + ... + (2n–1) = n^2$$

Welche anderen Figuren könnte man als Punktmuster legen? (Variation der Darstellung)
Naheliegend sind Dreiecke, aber auch Vielecke höherer Eckenzahl (5, 6, ...).

Ein Dreieck kann man nach Art einer Pyramide von unten nach oben aufbauen, z.B. zur Zahl 10 = 4 + 3 + 2 + 1 (dem im pythagoräischen Orden als "heilig" angesehenen Tetraktys):



Ein rechtwinkliges Dreieck entsteht, wenn man linksbündig untereinander 1, 2, 3, usw. Plättchen hinlegt:

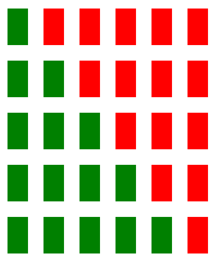


Die Dreieckzahlen d_n sind demnach die Summen der ersten n natürlichen Zahlen: $d_n = 1 + 2 + ... + n$.

Fragen:

- Wie lässt sich schnell feststellen, ob eine Zahl eine Dreieckzahl ist?
- Kann eine Dreieckzahl als Rechteck gelegt werden?
- Kann dabei ein Quadrat herauskommen?
- Welche Figuren lassen sich aus Dreiecken zusammensetzen?

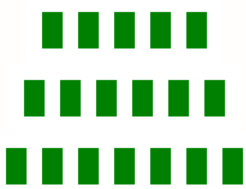
Ein interessantes Ergebnis erhält man durch Zusammenschieben zweier gleichgroßer Dreiecke:



Offensichtlich entsteht so durch die Addition $\boldsymbol{d_n} + \boldsymbol{d_n}$ ein Rechteck aus $n(n + 1)$ Punkten:

$$d_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ein schönes Problem ergibt sich aus der Variation der Dreieckzahlen. Ist eine Zahl nicht in der Form $1 + 2 + ... + n$ darstellbar, so vielleicht doch als Trapezzahl, d.h. Summe aufeinanderfolgender Zahlen $m + (m+1) + ... + n$. Zum Beispiel ist 18 keine Dreieckzahl, kann aber als 5 + 6 + 7 dargestellt werden. Das zugehörige Punktmuster sieht aus wie ein Trapez:



Für welche Zahlen gibt es eine solche Darstellung? Die ungeraden Zahlen gehören zu ihnen. Warum? Zu einigen Zahlen, z.B. 15, gibt es sogar mehrere Trapeze. Wie viele sind es, und wovon hängt diese Anzahl ab? Die Antwort wurde im 19. Jahrhundert von J. Sylvester gefunden und lautet: Die Anzahl der Trapezdarstellungen einer Zahl stimmt mit der Anzahl ihrer ungeraden Teiler überein.– Eine Aufarbeitung dieses Themas für den Unterricht im 5.-8. Schj. findet man in [Winter, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. 1. Aufl. 1989, 2., verb. Aufl.: Vieweg: Braunschweig; Wiesbaden 1991, S. 155-158].

Mehr und Merkwürdiges über figurierte Zahlen (Punktmuster), auch in drei Dimensionen, bietet Conway, J. H.; Guy, R. K.: *Zahlenzauber. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen*. Birkhäuser-Verlag: Basel; Boston; Berlin 1997.

Zahlenfelder

Unter Zahlenfeldern sind hier figurierte Anordnungen (Dreiecke, Rechtecke usw.) von Zellen zu verstehen, in die Zahlen eingetragen werden. Zwischen diesen Einträgen bestehen bestimmte Relationen. Wir betrachten einige einfache Beispiele: Rechenpyramiden, Pascal-Dreieck, Hundertertafel, Einmaleinstafel.

Rechenpyramiden

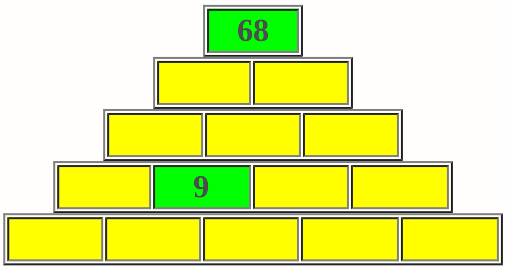
werden von unten nach oben aufgebaut. In der ersten (untersten) Zeile stehen irgendwelche Zahlen; darüber liegt eine Zeile, deren Einträge als Operationsergebnis (Summe, Differenz, Produkt, etc.) der beiden tieferliegenden Nachbarn bestimmt sind, usw. Die folgende Pyramide entsteht durch Summenbildung ausgehend von den ungeraden Zahlen unter 10:

80				
32	**48**			
12	**20**	**28**		
4	**8**	**12**	**16**	
1	**3**	**5**	**7**	**9**

Eine Vielzahl von Fragen (und Variationsmöglichkeiten) bieten sich an, zum Beispiel:

- Welche Folgen stehen in den Schrägzeilen? Man beachte benachbarte Schrägzeilen.
- Was passiert, wenn die untere Reihe sinngemäß verlängert wird (z.B. 1-3-5-7-9-11-13, usw)?
- Andere Grundreihen können ausprobiert werden: konstante Folgen wie 1-1-1-1-1, die ersten natürlichen Zahlen 1-2-3-4-5, die Folge 0-0-1-0-0, die Zweierpotenzen 1-2-4-8-16 (wie sieht in diesem Fall die erste Schrägzeile aus?)
- Ein Eintrag in der Grundreihe wird verändert, z.B. um 1 erhöht. Wie pflanzt sich diese Änderung in der Pyramide fort? (Nicht alle Zellen sind betroffen. Welche sind betroffen und welche Zuwächse weisen sie auf?)
- Wie verändert sich die Spitze, wenn alle Basiseinträge um 1 erhöht werden?

Schüler können eigene Fragen erfinden und die entsprechenden Pyramiden rechnen. Interessant sind Übungen, in denen eine Pyramide aufgefüllt werden soll, in der statt der Grundreihe die darüberliegende Reihe oder irgendwelche anderen Einträge bekannt sind:



Kann man diese Pyramide symmetrisch auffüllen? Kann man sie so (unsymmetrisch) auffüllen, dass in der Grundreihe die Zahlen von links nach rechts größer werden oder sogar unmittelbar aufeinander folgen? Man denke sich weitere Variationen und Fragen aus.

Pascal-Dreieck

Bei einer Zahlenpyramide mit der Grundreihe 0-0-1-0-0 entsteht das bekannte Pascal-Dreieck. Die sich nach oben hin verjüngende Pyramide lässt dem in entgegengesetzter Richtung wachsenden Dreieck nicht genügend Platz. Es ist daher günstiger, die 1 an die Spitze zu setzen und von oben nach unten zu rechnen:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Dieses (schon in Rechenbüchern des alten China nachgewiesene) "arithmetische Dreieck" steckt voller bemerkenswerter Eigenschaften. Hier einige Fragen, die zu näherer Beschäftigung mit dem Thema einladen sollen:

- Wie lässt sich die Symmetrie des Dreiecks erklären?
- Welche Summe liefern die Zahlen in der ersten, zweiten, dritten usw. Zeile? Wie kann man das erklären?
- Welche Folge steht in der ersten, zweiten, dritten usw. Spalte?
- Wie kommt es, dass Diagonalen und Spalten übereinstimmen?
- Man suche ein Bildungsgesetz für die dritte Spalte. Wie lautet das allgemeine Bildungsgesetz für die k-te Spalte?

Hunderter-Tafel

Das quadratische Feld aus den ersten 100 natürlichen Zahlen ist ein hervorragendes Veranschaulichungs- und Rechenhilfsmittel (2. Schuljahr):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

In dieser (vielleicht auf den ersten Blick langweilig wirkenden) Struktur lassen sich interessante Beobachtungen machen:

- Ein Schritt nach rechts bedeutet +1, ein Schritt nach links –1, ein Schritt nach unten +10 und nach oben –10.
- Wie addiert (subtrahiert) man geschickt 8 oder 9 zu (von) einer Zahl (und entsprechend 19, 29 usw.)?
- Welche Zahlenreihen stehen in den Diagonalen?
- Wo stehen die Vielfachen von *n*? (etwa für *n* = 2, 5, 10, 4, 8, 3, 6, 9, 7)

Aufgabe: Nach und nach sollen die echten Vielfachen gestrichen (hier: grau unterlegt) werden, zunächst von 2, 3, 5, usw. (einige Zahlen werden mehrfach gestrichen – welche?):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Die Vielfachen von 7 ("Siebenerzahlen") wurden hier noch nicht alle gestrichen. Welche können nur übrig geblieben sein? Nachdem auch diese gestrichen sind, bleiben noch die Primzahlen bis 100 (ausgenommen 1, die keine Primzahl ist). Dieses Siebverfahren stammt von dem griechischen Universalgelehrten Eratosthenes, der im 3.

Jahrhundert v. Chr. der berühmten Bibliothek von Alexandria vorstand.

Einmaleins-Tafel

Die Einmaleins-Tafel ist eine Tabelle mit allen Multiplikationsergebnissen $a \times b$ für ganze Zahlen a und b zwischen 1 und 10. In ihr steckt eine Fülle von einfachen, aber auch von raffinierteren Mustern.

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Hier einige Fragen zur Aufschließung des Themas:

- Welche Zahlen stehen in den Zeilen? in den Spalten?
- Wo finden wir die Quadratzahlen?
- Wo liegen die Dreieckzahlen?
- Welche Summe haben die Zeilen, Spalten, Diagonalen?

Interessantes ergibt sich beim Aufsummieren spezieller Felder, z.B. des (hier gelb) hervorgehobenen "Winkels":

$$5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 20 + 15 + 20 + 5 = 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$$

In der Klammer steht – nach dem, was wir schon über Punktmuster wissen – das Quadrat von 5, der betreffende Winkel hat also die Summe $5 \cdot 5^2$. Das gilt natürlich auch allgemein: Die Summe der Zahlen im n-ten Winkel ist die n-te Kubikzahl ("Würfelzahl").

Was passiert, wenn wir alle Winkel der Einmaleins-Tafel zusammenzählen? Das Ergebnis ist dann die Summe der ersten 10 Kubikzahlen. Da in den Winkeln genau die Zahlen der Einmaleins-Tafel vorkommen, findet man:

$$(1 + ... + 10) \cdot (1 + ... + 10) = (5 \cdot 11) \cdot (5 \cdot 11).$$

Dies lässt sich direkt zu der schönen Formel verallgemeinern:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Wer weitere Information und Anregungen zum Thema Zahlenfelder sucht, wird fündig bei Conway/Guy 1997, Kroll, W.: Zahlenfelder, ein Kontext für entdeckendes Lernen. In: Bender, P. (Hrsg.): *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter*: Cornelsen Verlag: Berlin 1988, 115-130, Radatz, H.; Schipper, W.: *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel Schulbuchverlag: Hannover 1983, Winter 1991.

Quadratgitter

Quadratische Gitter kennt man von kariertem Papier, vom Schachbrett oder von bestimmten Stadtplänen mit rechtwinklig kreuzenden Straßenzügen (Manhattan, Buenos Aires, in Deutschland am ehesten Mannheim). Die Gitterstruktur entsteht durch die *Einheitsstrecken* (Maschenweite, Blocklänge) und die *Gitterpunkte* (Geradenschnittpunkte, Kreuzungen). Man kann einen Punkt als Ursprung (0,0) auszeichnen und verfügt sofort über ein rechtwinkliges (ganzzahliges) Koordinatensystem.

Quadratgitter bergen eine unerschöpfliche Fülle von Aspekten: Diese reichen von einfachen Fragen, für die sich Schüler interessieren können, bis hin zu anspruchsvollen Problemen, die zur Entwicklung mathematischer Theorien Anlass geben.

- Welche Wege gibt es zwischen zwei Punkten im Gitter? (Ein Weg besteht aus Einheitsstrecken.)
- Der Abstand zwischen zwei Gitterpunkten soll bestimmt werden. Zu unterscheiden ist der euklidische Abstand ("Luftlinie") vom Gitterabstand, d.h. der Länge eines kürzesten Verbindungswegs im Gitter.
- Offenbar gibt es mehrere Verbindungswege kürzester Länge zwischen zwei Punkten. Wieviel sind es genau? Wie kann man sie systematisch zählen?

Man schaue sich den abgebildeten Gitterausschnitt an: Startpunkt ist die linke untere Ecke des grünen Blocks, Zielpunkt ist die entsprechende Ecke des gelben Blocks. In den Planquadraten ist an jedem Punkt die Anzahl der kürzesten Wege notiert, die zu ihm vom Startpunkt aus führen:

1	**5**	**15**	**35**	**70**	**126**
1	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Das Schema wird ausgehend vom Startpunkt schrittweise in Richtung Zielpunkt aufgebaut. Nach welcher Additionsregel? Wieso kommt dabei das Pascal-Dreieck heraus?

Natürlich ist hier auf das *Geobrett* hinzuweisen. Es lässt sich leicht aus einer kleinen Holztafel herstellen, in die man Nägel als Gitterpunkte einschlägt. Mit Gummibändern werden dann Punkte verbunden. Auf diese Weise lassen sich zahlreiche Aktivitäten durchführen und bemerkenswerte Einsichten gewinnen. Zum Unterrichtseinsatz des Geobretts vgl. etwa Steibl, H.: *Geobrett im Unterricht*. Georg Kallmeyer Verlag: Göttingen 1976.

Kombinatorische und geometrische Aspekte im Quadratgitter werden in Band 1 von Jeger, M.: Einführung in die Kombinatorik. 2 Bände. Klett: Stuttgart 1973-1976, behandelt. Der Kontext lässt sich auch für Übungen in der Bruchrechnung nutzen [vgl. Flachsmeyer, J.: Bruchrechnung in einem geometrischen Kontext ebener Gitterpunktfiguren. *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung*. Bultmann & Gerriets: Oldenburg 1999, 23-46].

Wie in der gewöhnlichen (euklidischen) Geometrie gelangt man in der Gittergeometrie mit Hilfe von Abständen zu "Figuren" [vgl. Krause, E. F.: *Taxicab Geometry*. Addision-Wesley: Reading, Mass. 1975]:

- Welche Punkte können mit 3 Schritten (Einheitsstrecken) von einem Punkt aus erreicht werden? ("Kreise")
- Wo liegen alle Punkte M, die von zwei gegebenen Punkten A und B gleichen Abstand haben? ("Geraden"). Wann ist dieser Abstand am kleinsten?
- Man untersuche dieselbe Frage für drei Punkte A, B, C.

Kann man auch einen Punkt S finden, für den die Summe der Gitterabstände AS, BS, CS minimal wird?
- Man untersuche diese Frage für vier Punkte A, B, C, D, etwa in der Einkleidung: Ein fairer Treffpunkt.

Abschließend sollen noch sogenannte *diophantische* Probleme angedeutet werden:

- Man zeichne eine gewöhnliche euklidische Figur in ein Quadratgitter, z.B. eine Gerade durch (1,–1) mit der Steigung –2/3. Geht diese Gerade noch durch andere Gitterpunkte? Man bestimme alle.
- Man zeichne einen Kreis vom Radius 5 um einen Gitterpunkt. Er schneidet das Geradenkreuz, das durch sein Zentrum verläuft, in vier Gitterpunkten. Liegen noch weitere Gitterpunkte auf dem Kreisrand?
- Für welche Kreise hat die zuletzt gestellte Frage eine positive Antwort? Man experimentiere mit Radien zwischen 1 und 15.

Diophantische Probleme können sich als überaus schwierig erweisen. Prominentestes Beispiel ist die berühmte (dreieinhalb Jahrhunderte alte) Fermatsche Vermutung, die erst Mitte der 90-er Jahre von Andrew Wiles endgültig entschieden wurde [vgl. Singh, S.: *Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels*. Hanser Verlag: München; Wien 1998].

Vielecksparkette

Eine Parkettierung ist eine lückenlose und überlappungsfreie Überdeckung der Ebene mit Teilen (Fliesen, Stücken, Platten, z.B. regelmäßige *n*-Ecke). Ein Vielecksparkett soll hier folgende Bedingungen erfüllen:

1. Alle Stücke sind regelmäßige Vielecke (Polygone).
2. Ecken kommen stets an Ecken zu liegen.
3. Um jede Ecke herum kommen dieselben Vielecksorten (in jeweils gleicher Anzahl) vor.

Das bekannteste Beispiel ist das Parkett aus Quadraten (4 Quadrate um eine Ecke). Ein Parkett, das wie dieses nur eine Sorte regelmäßiger Vielecke verwendet, nennt man *platonisch*. Man kann auch zwei Achtecke und ein Quadrat zusammenlegen und erhält das Beispiel eines sogenannten *archimedischen* Parketts. Die beiden Parkette werden wie folgt notiert: P(4 4 4 4) bzw. P(4 8 8).

Worin liegt die Bedeutung des Themas für den Unterricht?

- Es liefert einen *Beitrag zur Umwelterschließung*. Überall sind wir von Parkettierungen umgeben: Straßenpflaster, Fliesen in Bad, Küche oder Eingangshallen, Glasfenster, Mosaike, Flächenornamente (Wandtapeten), etc.

- *Spielerische Aktivitäten* werden unterstützt (Legespiele, Ausfüllen von Flächen mittels Drucken, Kleben, Malen).

Foto aus R. Schmalz: Die Parkettierung der Ebene ...[Hausarbeit zum 2. Staatsexamen für die Sekundarstufe I. Rheine 1983]

- Der Kontext bietet viele *Möglichkeiten zu substanziellen Entdeckungen*.

- Das Thema steht nicht isoliert da, sondern weist *Bezüge zu zentralen mathematischen Begriffen und Ideen* (auch Bestandteilen des Curriculums) auf: Kongruenz (geometrische Gleichheit) und Passen, Vielecke, Winkel, Winkelsummensätze, Symmetrie, u.a.m.

Es folgt eine Sequenz von Aktivitäten und Fragen, die in den Kontext hineinführen:

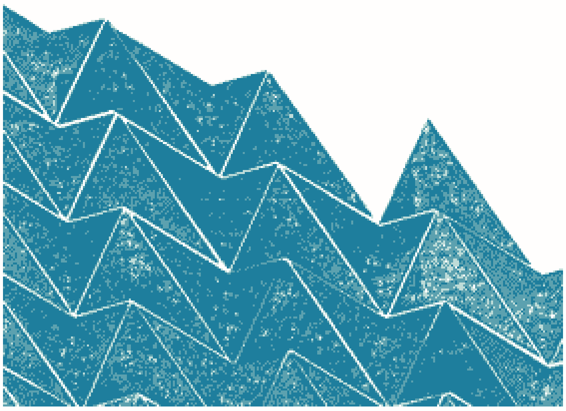
- Welche Vielecksparkette findet man als Fliesenmuster, Pflasterungen, etc. am häufigsten in der Umwelt?
- Warum kommen Dreiecke darin seltener vor als andere Polygone?
- Wie zeichnet man P(3 3 3 3 3 3) mit dem geringsten Aufwand?
- In P(3 3 3 3 3 3) lassen sich Dreiecke zu Sechsecken zusammenfassen. Welche neuen Parkette kann man auf diese Weise gewinnen?
- Auf welche Weise lassen sich Dreiecke und Quadrate um eine Ecke herum legen? Welche dieser Varianten lässt sich zu einem vollen Parkett ausdehnen?
- Wie viele Fünfecke passen höchstens aneinander? Wie groß ist die noch verbleibende Lücke? (Winkel berechnen)
- Kann ein Eckenschluss unter Beteiligung von Fünfecken hergestellt werden, indem man Dreiecke und/oder Quadrate hinzunimmt?
- Mit einer einzigen Sorte von Vielecken lassen sich genau drei Parkette realisieren: P(3 3 3 3 3 3), P(4 4 4 4) und P(6 6 6). Warum? (Winkel und Winkelsummen betrachten)

Winkelbetrachtungen setzen voraus, dass man den Innenwinkel des regelmäßigen n-Ecks kennt. Er beträgt $(1–2/n)\cdot 180^\circ$. Will man also etwa einen Eckenschluss mit jeweils einem Polygon der Eckenzahl m, n und r erreichen, so muss die Summe der zugehörigen Innenwinkel 360º betragen (Vollwinkel). Daraus ergibt sich die diophantische (in ganzen Zahlen m, n, r zu erfüllende) Bedingung:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$$

- Man suche alle Lösungen dieser Stammbruchgleichung. (Vier von ihnen führen zu Parkettierungen, darunter P(6 6 6) und P(4 8 8); das Tripel $m = 5$, $n = 5$, $r = 10$ ist zwar eine Lösung der Gleichung und entspricht einem Eckenschluss, an den betreffenden Vielecksbaustein kann aber nicht weiter angelegt werden.)
- Eine analoge Betrachtung ist noch für vier und fünf Polygone in einer Ecke zu führen. P(3 3 3 3 3 3) ist das einzige Parkett mit 6 in einer Ecke zusammentreffenden Polygonen.

Parkettierungen mit Dreiecken und Vierecken sind auch möglich, wenn man von diesen Figuren keinerlei Regelmäßigkeit verlangt. Vierecke müssen nicht einmal konvex sein:



Gestempeltes Parkett. Aneinanderliegende Vierecke gehen durch eine Halbdrehung (um den Mittelpunkt ihrer gemeinsamen Seite) ineinander über.

Für elementare und unterrichtsbezogene Studien zum Thema Parkettierung vgl. Bender, P.; Schreiber, A.: *Operative Genese der Geometrie*. Hölder-Pichler-Tempsky: Wien; B. G. Teubner: Stuttgart 1985 [S.123-139, Akzent: praktischer Gebrauch], Floer, J.; Haarmann, F. (Hrsg.): *Mathematik für Kinder*. Beltz: Weinheim; Basel

1982, Floer, J.: Parkette – Einige Anregungen zur Verzahnung von Geometrie- und Kunstunterricht. In: Bender, P. (Hrsg.): *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter*: Cornelsen Verlag: Berlin 1988, 37-47[Akzent: Verzahnung von Geometrie und Kunst], Flachsmeyer, J.; Feiste, U.; Manteuffel, K.: *Mathematik und ornamentale Kunstformen*. Mathematische Schülerbücherei. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft: Leipzig 1990, 111-117 [Akzent: Symmetrieeigenschaften, Gruppen]. In Klarner, D. A. (ed.): *The Mathematical Gardner*. Wadsworth International: Belmont (Calif.) 1981 findet man locker und glänzend geschriebene Essays zu vielen Fragen der Parkettierung.

Das Thema Parkettierung wird in später noch einmal aufgegriffen.

Ergänzende Materialien

Von den mancherlei Kontexten, die sich für entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht eignen, werden noch drei in gedrängter Form angedeutet und zur weiteren Vertiefung empfohlen:

- Münzsätze
- Billard
- Quadrate

Münzsätze

Der Umgang mit Geldbeträgen ist ein alltäglicher Handlungskontext, der das Verständnis von Zahlen fördert und umgekehrt von ihm profitiert. Mit Sätzen kleiner Münzen sollen Geldbeträge dargestellt werden.

- Welche Beträge kann man legen?
- Was erhält man mit 2 Münzen, mit 3 Münzen, usw.?
- Wie zählt man zu gegebenem Münzsatz geschickt die damit möglichen Zusammenstellungen?
- Mit welchem kleinsten Münzsatz lassen sich alle Beträge bis zu einer bestimmten Höhe darstellen?
- Wieviel werden dabei im Durchschnitt benötigt?
- Gibt es einen "besten" Münzsatz? Man vergleiche die deutschen Münzen mit ausländischen.

Vgl. Müller/Wittmann 1978 [S. 68-71] und die einschlägigen Artikel von H. Winter in Heft 22 von *mathematik lehren* (Juni 1987).

Billard

Billard ist ein zwar nutzloses, aber reizvolles Problemfeld für allerlei geometrische und arithmetische Aktivitäten. Auf einem $m \times n$-Tisch wird eine Kugel aus einer Ecke in einem bestimmten Winkel gestoßen.

- Wie verläuft ihre Bahn?
- Wie oft reflektiert sie an einer Bande?
- Landet sie irgendwann in einem Loch (Ecke)?

Stoßprobleme bestehen darin, die Punkte an einer oder mehreren Banden zu bestimmen, an denen eine Kugel reflektieren soll, um eine zweite zu treffen. Eine andere Aufgabensorte fragt nach periodischen Bahnen (wobei man auch die Tischform variieren kann, z.B. zum Dreieck, nicht-rechteckigen Viereck oder Kreis).

Vgl. Stowasser, R.: Küstenschiffahrt, Landmessen, Billard – drei Problemfelder der Geometrie. *Der Mathematikunterricht* 22/3 (1976), 24-51.

Quadrate

Bei nur oberflächlicher Betrachtung scheint das Quadrat eine "langweilige" Figur zu sein. Das Gegenteil ist der Fall. Man zeichne beide Diagonalen: Es entstehen vier gleiche rechtwinklige Dreiecke. Je zwei von ihnen bilden ein Quadrat, das halb so groß ist wie das ursprüngliche. Das ist schon ein einfacher Sonderfall des "Pythagoras". Er zeigt gleich mit, wie man ein Quadrat doppelten Flächeninhalts bestimmt. Eine Variante: Man beschreibe einem Quadrat Q ein kleineres Quadrat Q' ein (die Ecken von Q' liegen auf den Seiten von Q). Wie wird Q' am kleinsten? Wie groß ist dann Q'? Man setze die Schachtelung fort und zeichne Q'' in Q', usw.– Vgl. dazu die hübsche Sequenz von Aufgaben und Zeichenspielen in Menninger, K.: *Zwischen Zahl und Raum*. Ullstein: Frankfurt am Main 1960 [S. 22-43]

Man kann Quadrate zu Mehrlingen zusammenlegen (Seite an Seite). Beliebt ist das Aufsuchen aller Fünflinge (Pentominos), von denen es genau 12 gibt. Wie kann man sich davon überzeugen? Man erstelle einmal einen Stammbaum, der bei einem Quadrat beginnt, dann über Zwillinge, Drillinge usw. sich verzweigt. – Was kann man mit den Pentominos anfangen? Man untersuche ihre Form auf Symmetrie. Man lege mit einigen von ihnen Rechtecke aus. Man versuche, mit ihnen die ganze Ebene parkettieren (mit welchen geht das?).– Vgl. Müller/Wittmann 1978 [S. 71-76].

Ein schönes Analogon im Dreidimensionalen sind Würfelmehrlinge. Man überlege einmal, wieviel "Häuser" sich mit vier gleichen Würfeln auf einer Tischplatte (lose) zusammenlegen lassen.– Vgl. Freudenthal, H.: Four-Cube-Houses. For the Learning of Mathematics 1/2 (1980), 12-14, und Kroll, A.; Kroll, W.: Bauen und Spiegeln. *Mathematik lehren*, Heft 77 (1996), 9-13.

Auf kariertem Papier wird ein 5×5-Quadrat gezeichnet; es hat 25 Einheitsquadrate. Wie viele Quadrate (mit Seiten auf den Gitterlinien) enthält es insgesamt? Wie viele sind es bei einem $n\times n$-Quadrat?