Unterricht vom Fach aus

Welchen Unterricht braucht Mathematik?

Diese Frage (nicht weniger als der vorangestellte Titel) schließt eine grundlegende Auffassung ein: Der Mathematikunterricht benötigt nicht bloß allgemeindidaktische und unterrichtsmethodische Regeln; vielmehr braucht er didaktische Konzepte, die auf das Fach bezogen sind, auf die Eigenart seiner Begriffe, auf die Natur des mathematischen Wissens und die Wege seiner Gewinnung bzw. Aneignung. Für die Qualität des Unterrichts sind die zugrunde liegenden fachdidaktischen Konzepte – sie sollen hier auch *Leitideen* oder *Leitlinien* genannt werden – von erheblicher, ja entscheidender Bedeutung.

Fachdidaktische Leitideen sind nicht mit den allgemeinen Zielen des Mathematikunterrichts zu verwechseln, auch wenn es eine Beziehung zwischen ihnen geben mag. Die Ziele beschreiben, was wir mit Mathematik an der Schule erreichen wollen. Die Leitideen bzw. Unterrichtskonzepte sagen hingegen etwas über die Beschaffenheit des Unterrichts aus, darüber, wie er im Innern angelegt und ausgerichtet sein sollte. Die Einzelheiten der Unterrichtsgestaltung, die methodischen Bausteine zu seiner Durchführung werden hierdurch allerdings kaum mehr als vage eingegrenzt und noch keinesfalls festgelegt.

Wie gelangt man zu Leitideen der gewünschten Art? Im Hintergrund aller Überlegungen steht ein Bild von der Mathematik, eine Vorstellung davon, welche Rolle Mathematik für den einzelnen Menschen und für die Gesellschaft spielt. Mit anderen Worten: Es ist über den *Sinn der mathematischen Tätigkeit* nachzudenken. – Im folgenden werden drei fachdidaktische Leitideen erörtert. Sie haben z.T. eine lange Tradition. In den letzten Jahrzehnten hat sich die Mathematikdidaktik mit ihnen kritisch auseinandergesetzt und sie dabei weiter präzisiert und mit neuen Akzenten versehen.

Kurze Vorschau

- Durch die *Betonung zentraler, grundlegender Ideen und Begriffe* soll eine Konzentration auf das Wesentliche bewirkt, der Überblick, das Verständnis und das Behalten verbessert werden.
- Im Zusammenhang damit ist darauf zu achten, dass Lernende zu den Begriffen, die sie sich aneignen, *angemessene* (sachadäquate und fachkompatible) *Grundvorstellungen entwickeln*.
- Der *Idee des entdeckenden Lernens* ist in vertretbarem Umfang Geltung zu verschaffen, ohne dass dabei auf bewährte Formen der direkten Instruktion verzichtet wird.

Zentrale Ideen

Situationen, in denen man "den Wald vor lauter Bäumen nicht sieht", sind dem Lernen abträglich. In der Mathematik ist das nicht anders; gerade hier kommt es darauf an, den Kern eines Sachverhalts aus der Hülle und Fülle verwirrender Einzelheiten herauszuschälen. Lernpsychologisch ist es ratsam, sich immer wieder die große

Linie, die Hauptgedanken, die grundlegenden Aspekte bewusst zu machen. Das gilt nicht weniger für das Erkennen, das Verstehen der Sache selbst. Wir begreifen einen Gegenstand besser, wenn wir ihn unter eine bündelnde (zentrale) Idee fassen. Vollzieht dies ein lernendes Kind, so wendet es auf seiner Stufe ein Prinzip echter Forschungsarbeit an.

Das Konzept der zentralen (fundamentalen, universellen oder ähnlich bezeichneten) Ideen wird heute als ein Mittel anerkannt, aus der Fülle möglicher Unterrichtsstoffe eine Auswahl zu treffen. Zugleich soll damit ein Wesenszug der mathematischen Tätigkeit auch im schulischen Mathematikunterricht zur Geltung kommen. Für die Mathematik klar ausgesprochen findet sich das Prinzip bei Whitehead, A. N.: The Mathematical Curriculum. In: *The Aims of Education and other Essays*. New York/London 1929. Dt. Übers.: Neue Sammlung 2 (1962), 257-266, allgemeinpädagogisch ausgearbeitet wurde es von Bruner, J. S.: *The Process of Education*. Cambridge, Mass. 1960. Dt. Übers: *Der Prozeß der Erziehung*. 3. durchges. Aufl., Berlin Verlag, Berlin und Pädagogischer Verlag Schwann: Düsseldorf 1973. Geeignete fundamentale Ideen wurden zunächst zu einzelnen Gebieten der Mathematik herausgearbeitet, z.B. zur Stochastik in Heitele, D.: An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6 (1975), 187-205, zur Analysis in Fischer, R.: Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. *Zentralblatt f. Didaktik der Mathematik* 3 (1976), 185-192, zur Geometrie in Bender, P.; Schreiber, A.: *Operative Genese der Geometrie*. Hölder-Pichler-Tempsky: Wien; B. G. Teubner: Stuttgart 1985, zu Anwendungen der Mathematik in Humenberger, J.; Reichel, H. Ch.: *Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. BI-Wissenschaftsverlag: Mannheim 1995 . Parallel dazu hat man das Konzept selbst immer wieder diskutiert und weiterentwickelt (vgl. etwa Schreiber, A.: Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: *mathematica didactica* 6 (1983), 65-76, sowie die ausführliche historische Zusammenschau und Bewertung bei Schweiger, F.: Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal f. Mathematikdidaktik* 13 (1992), 119-214 (mit ausführlicher Bibliographie)).

Die Ausdrücke "Idee" und "Begriff" bedeuten in unserem Zusammenhang nicht dasselbe, sondern verweisen auf unterschiedliche Bereiche. Ideen sind weniger klar festgelegt als Begriffe; sie gehören zur vormathematischen Erfahrung, zum intuitiven, von der Anschauung geleiteten Denken. Begriffe sind hingegen schärfer umrissen und – zumindest in der Mathematik – meist durch eine exakte Definition gegeben. Aus einigen Ideen (z.B. Symmetrie) lässt sich durchaus ein abstrakter mathematischer Begriff gewinnen. Vor allem aber in ihrem ursprünglichen, formal noch nicht ausgearbeiteten Stadium eignen sich Ideen für didaktische Zwecke.

Was heißt "zentral/fundamental"?

Wann ist eine Idee als zentral bzw. fundamental anzusehen? – Gewiss lassen sich allerlei plausible Forderungen aufstellen, unter anderem die folgenden (nicht immer überschneidungsfreien) Kriterien:

- *Weite* :
  Bündelung von (Vor-)Erfahrungen aus unterschiedlichen Bereichen; Allgemeinheit und Ausbaufähigkeit
- *Fülle* :
  Vielfältige Anwendbarkeit, Beziehungshaltigkeit zu mathematischen und außermathematischen Themen
- *Sinn* :
  Zugänglichkeit (ohne formale Begriffbildung), Verankerung im Alltagsdenken, lebensweltliche Bedeutung

Zum Aufweis geeigneter zentraler Ideen bedarf es einer eingehenden Analyse des mathematischen Denkens unter historischen, erkenntnistheoretischen und didaktischen Gesichtspunkten. Hierbei sind recht unterschiedliche Akzentsetzungen möglich, und es wundert nicht, dass bisher noch keine Ideenliste allseitige Zustimmung gefunden hat. Die folgende (mit Sicherheit unvollständige) Kollektion enthält denn auch nur einige der am häufigsten genannten Ideen, deren überragende (und zentrale) Rolle im mathematischen Denken allgemein anerkannt wird:

1. *Approximation* (Annäherung, sukzessives Ausschöpfen)
2. *Iteration* (Wiederholung von Aktionen oder Elementen)
3. *Abbildung* (funktionaler Zusammenhang, eindeutiges Zuordnen)
4. *Algorithmus* (mechanische, effektive Handlungsvorschrift)
5. *Quantität* (Zählen, Vergleichen, Messen)
6. *Optimierung* (eine kleinste, größte, beste Lösung suchen)
7. *Symmetrie* (Ebenmaß, Gleichgestaltigkeit, Invarianz)

Didaktischer Nutzen

Der didaktische Nutzen solcher Allgemeinheiten liegt nicht ohne weiteres auf der Hand. Wie lässt er sich erkennen und zur Geltung bringen? Gewiss nicht durch eine einmalige Begegnung, z.B. mit dem Abbildungsgedanken oder der Idee des Algorithmus. Soll das Konzept im Unterricht wirksam werden, muss das Wesen einer zentralen Idee an den einzelnen Lerngegenständen immer wieder herauspräpariert werden.

Beispiel 1

Babylonisches Wurzelziehen (Berechnung der Quadratwurzel nach Heron). Bei diesem Thema treten wenigstens drei zentrale Ideen zugleich auf den Plan: Approximation, Iteration, Algorithmus. Der Heronsche Algorithmus berechnet eine Folge von rationalen Zahlen, die der gesuchten Quadratwurzel beliebig nahe kommen. Die Näherungsgüte steigt mit der Anzahl der Iterationsschritte. Das wiederholte Durchlaufen derselben Rechenprozedur ist typisch für viele Algorithmen, vor allem bei approximierenden Verfahren. Dass man Näherungen berechnet, darf nicht als Nachteil oder Verlegenheitslösung bewertet werden; es gehört zum Wesen der Sache.

Beispiel 2

Die Idee der Abbildung hat viele Facetten; die funktionale Abhängigkeit ist nur eine von ihnen (allerdings eine sehr bedeutende). Eine andere Anwendungsart von Abbildungen ist das Codieren bzw. die Darstellung von Dingen mit geänderten Namen. Um z.B. die Teiler einer ganzen Zahl – sagen wir: 600 – zu zählen, betrachten wir ihre Primfaktorzerlegung ($600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$). Da irgendein Teiler von 600 höchstens diese Primfaktoren enthält, hat er die Form $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$. Man kann ihn also durch ein Tripel (a, b, c) beschreiben, für das $0<=a<=3$, $0<=b<=1$ und $0<=c<=2$ gilt. Die Anzahl aller Teiler beträgt somit 24 ($= 4 \cdot 2 \cdot 3$). Den Kern dieser Überlegung bildet die "neue" Darstellung eines Teilers durch die ihn codierende Exponentenfolge.

Die Kombinatorik benutzt dieses Zählprinzip in Form einer allgemeinen Gleichheits- oder Zuordnungsregel.

Beide Beispiele beziehen sich zwar auf einen innermathematischen Sachverhalt, benutzen dabei aber Ideen, die auch in der Alltagswirklichkeit eine Rolle spielen. Dass man eine Handlung (z.B. einen Arbeitsgang) solange wiederholt, bis das Ergebnis nahe genug an die Zielvorstellung herankommt, ist nichts Ungewöhnliches. Auch Codierungen, mit denen Dinge (anders als ursprünglich gegeben) repräsentiert werden, sind im Alltag gebräuchlich (Identifizierung eines Kfz-Halters durch das Kennzeichen seines Fahrzeugs; Benennung eines Planquadrats, in dem eine Straße liegt, durch ein Koordinatenpaar wie D7, usw.). Im Unterricht müsste schrittweise darauf hingewirkt werden, die Analogie zwischen dem vertrauten lebensweltlichen Aspekt einer Idee und ihrer raffinierteren Anwendungsform in der Mathematik bewusst zu machen. Bei weitverbreiteten, tiefsitzenden und direkt aufweisbaren Ideen – etwa Quantität (Zahl), Iteration, Optimierung, Symmetrie – mag dies leichter gelingen als bei vielschichtigen, meist schon mathematisch vorgeprägten Gedankenkomplexen (Abbildung, Algorithmus, Approximation).

Es ist nicht leicht, präzise zu beschreiben, wie das (hier nur knapp umrissene) Unterrichtskonzept über seine Funktion als Stoffauswahlkriterium hinaus methodisch umgesetzt werden kann. Gewiss darf es nicht darauf hinauslaufen, Lernenden bei jeder sich bietenden Gelegenheit eine allgemeine Vokabel aus dem Arsenal der fundamentalen Ideen unterzuschieben. Das würde den Aufwand an unverstandener Begrifflichkeit vermehren anstatt ihn zu verringern. Vielmehr gilt:

> Unterrichtsthemen und Lerngegenstände sollten in ihrer Struktur und Darstellungsform von den zentralen Ideen (mit)geprägt werden, die von der Sache her in ihnen angelegt sind.

Ein Routineverfahren bietet sich dazu nicht an. Zentrale Ideen wirken eher implizit, gehören mehr zum Hintergrundwissen des Lehrers als zum Vordergrundwissen des Schülers; sie kommen vor allem dann zur Geltung, wenn man an der richtigen Stelle die richtigen Akzente setzt (nicht anders als beim Vorlesen eines Satzes, den die Zuhörer auch erst durch sinnvolle Betonung verstehen). Aus dieser Sicht können sie den Mathematikunterricht davor schützen, zu einer Nonsens-Veranstaltung auszuarten. Ein krasses Beispiel für die schrittweise Eliminierung von Sinn im Klassenzimmer findet man bei Gårding, L.: *Encounter with mathematics*. Springer: New York 1977 in Form einer satirischen Fabel.

Angemessene Grundvorstellungen

Zentrale bzw. fundamentale Ideen sind vergleichsweise allgemein und übergreifend. Sie sind nicht spezifisch für ein einzelnes Gebiet, sondern treten – immer wieder anders ausgeprägt – in mehreren Gebieten auf. Die Idee der Abbildung spielt z.B. in der Analysis, Algebra, Geometrie und in der Kombinatorik eine wichtige Rolle, hat aber in jedem dieser Gebiete Besonderheiten, die für das Verständnis seiner Begriffe und Methoden maßgeblich sind. Man kann das Herausarbeiten fundamentaler Ideen zu Einzelgebieten daher auf zwei Arten deuten: einmal als einen Weg, überhaupt geeignete Ideen-Kandidaten zu auszumachen; dann aber auch als den Versuch, die bereichsspezifischen Grundbegriffe im Hinblick auf die in ihnen angelegte sachliche Intention zu deuten. Mit diesem zweiten Teil stehen wir vor einer Aufgabe eigenen Rechts: *die Vermittlung und das Verständnis mathematischer Begriffe durch geeignete Grundvorstellungen zu fördern*, die beim Schüler zu entwickeln und zu festigen sind.

Was ist eine Grundvorstellung?

Als eigenständiges (zu den zentralen Ideen komplementäres) Unterrichtskonzept wird dieser Ansatz bei Bender [Bender, P.: Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht, erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Postel, H.; Kirsch, A.; Blum, W. (Hrsg.): *Mathematik lehren und lernen*. *Festschrift für Heinz Griesel*. Schroedel: Hannover 1991, 48-60] vorgestellt und in zahlreichen Einzelheiten erläutert. Im folgenden soll das Konzept zwar in Anlehnung an Bender, jedoch in freier Auslegung und nur soweit skizziert werden, wie gegenüber den zentralen Ideen neue Facetten hervortreten.

Grundvorstellungen sind (ähnlich wie zentrale Ideen) nicht als formal definierte mathematische Begriffe misszuverstehen. Vielmehr handelt es sich um inhaltliche Vorstellungen, die vom Lernenden mit bestimmten Begriffen assoziiert werden. Was stellt ein Schüler sich vor, wenn von Variablen, Funktionen, Gleichungen, Grenzwerten etc. die Rede ist? Die inneren Anschauungsbilder dazu können sehr individuell, subjektiv gefärbt, gelegentlich auch inadäquat sein. Sie entwickeln sich im Umgang mit mathematischen Dingen oft wildwüchsig und geradezu zwangsläufig, als müsse ein Vakuum im Hintergrund gefüllt werden. Mit Recht scheuen Didaktiker davor zurück, solche subjektiven Vorstellungen einfach falsch zu nennen. Die Tatsache, dass ein Begriff im Kopf eines Schülers nicht mit der Definition im Kopf des Lehrers übereinstimmt, bedeutet ja nicht, dass die Schüler-Vorstellung keinen Eigenwert besitzt und deshalb durch eine von außen aufgezwungene, oberflächlich antrainierte "offizielle" Version zu ersetzen sei. Gleichwohl kann die Alternative nicht die sein, einen Schüler mit seinen evtl. schief aufgefassten Grundbegriffen bzw. den dahinter liegenden unangemessenen Grundvorstellungen sich selbst zu überlassen. Mathematisches Wissen muss intersubjektiv geteilt werden können, wenn Mathematik als erkenntnisgewinnende Tätigkeit und als eine Quelle allgemeiner Bildung möglich sein soll. Somit bleibt nur die Forderung, auf die Entwicklung angemessener Grundvorstellungen beim Schüler einzuwirken.

Was heißt "angemessen"?

Wann darf eine Grundvorstellung als *angemessen* bzw. *sachlich adäquat* gelten? Auch wenn eine Antwort auf diese Frage notgedrungen vage bleibt, erscheint doch der Versuch zweckmäßig, zumindest eine Richtung anzupeilen und folgende Kriterien in Betracht zu ziehen:

- fachliche Kompatibilität
- Verträglichkeit mit zentralen Ideen
- psychologische Plausibilität
- lebensweltliche Verankerung

Ausbaufähigkeit

Eine Grundvorstellung sollte mit der fachlichen Begrifflichkeit verträglich (kompatibel) sein, um Verstehensprozesse nicht durch widersprüchliche Ausrichtung zu erschweren. – Der positive Effekt zentraler Ideen sollte nicht unterlaufen werden. – Das lernende Subjekt muss eine Grundvorstellung *von seinem Standpunkt aus* annehmen können sowie nach und nach verinnerlichen. Sie sollte daher psychologisch plausibel sein (d.h. innere Stimmigkeit besitzen); außerdem sollte sie für den Lernenden zugänglich sein (z.B. durch vertraute Elemente aus lebensweltlichen Situationen). Zu diesem Punkt äußert sich Bender [1991, S. 49] wie folgt:

> *Hierfür sprechen sich viele Didaktiker aus* [...]*; jedoch wird schon in den meisten didaktischen Entwürfen und erst recht in der Unterrichtspraxis weltweit diese Forderung kaum erfüllt.*

Mit Grundvorstellungen, die "unbeaufsichtigt" entstehen – bei Fischbein, E.: Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning of Mathematics* 9/2 (1989), 9-14, heißen sie *tacit models* –, füllen Schüler auf eigene Faust die inhaltliche Leere, den Hohlraum hinter einer mathematischen Vokabel. Das Ergebnis ist oft ebenso simpel wie resistent gegen jede Form der Korrektur oder Weiterentwicklung. Eine Grundvorstellung ist aber nur dann angemessen, wenn sie sich als ausbaufähig erweist und mit den Einsichten in die Sachstrukturen eines Gebiets wachsen kann.

Unterrichtspraktische Umsetzung

Wie schon bei den zentralen Ideen liegt auch beim Konzept der angemessenen Grundvorstellungen die praktische Umsetzung, insbesondere die methodischen Möglichkeiten, auf die Vorstellungswelt der Lernenden einzuwirken, keineswegs auf der Hand. Welche Instrumente, welche Regulative bieten sich an?

Fischbein hat vorgeschlagen, dass Schüler ihre Grundvorstellungen gemeinschaftlich einer sog. metakognitiven Analyse unterziehen. Hier ist allerdings (mit Bender) auf die Gefahr der Überforderung hinzuweisen: Gerade bei den betroffenen Schülern, die primär um ein Verständnis des Stoffs ringen, können solche Meta-Betrachtungen leicht noch größere Verwirrung stiften.

Stattdessen empfiehlt Bender, a) die diagnostischen Erkenntnisse zu Fehlvorstellungen konsequenter für die Schulpraxis auszuwerten, und b) rechtzeitig (von der Primarstufe an) "die unweigerlich entstehenden Vorstellungen [...] gleich in die 'richtigen' Bahnen zu lenken" [S. 55]. Dazu müssen die Begriffe dann aber von vornherein veranschaulicht und in lebensweltliche Situationen eingebettet werden.

Eine wichtige Rolle spielen Fehler (einmal abgesehen von Flüchtigkeitsfehlern). Das Gros der systematischen Fehler wird durch "schiefe" Grundvorstellungen oder falsch gemerkte bzw. unzulässige Regeln im Kopf des Schülers erzeugt. Leider besteht die gängige Unterrichtspraxis darin, Fehler zu bekämpfen, zu vermeiden oder notfalls schlicht zu übertünchen. Auf diese Weise erfährt man nur noch wenig oder nichts darüber, welche Vorstellungen beim Schüler zu einem Fehler geführt haben. Die Alltagsweisheit, man solle aus seinen Fehlern lernen, bleibt damit unerfüllt.

Im Mathematikunterricht ist ein *flexibler, produktiver und realistischer Umgang mit Fehlern* anzustreben, insbesondere sollte ein Verhalten, das einseitig auf Fehlervermeidung ausgerichtet ist, vermieden werden.

Die Bedeutung von Fehlvorstellungen wird besonders drastisch durch das folgende prominente Beispiel von Rosnick und Clement beleuchtet [geschildert nach Fischer, R; Malle, G.: *Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Bibliographisches Institut: Mannheim 1985 , S. 33-38]:

Ein Umkehrfehler

Im Rahmen der Untersuchung Rosnick, P.; Clement, J.: Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. In: *Journal of Mathematical Behavior* 3/1 (1980), 3-27, hat man Studierenden verschiedenen Alters Aufgaben folgenden Typs vorgelegt:

> Es sei Z die Anzahl der Ziegen und K die Anzahl der Kühe auf einer Weide. Es sind dort fünfmal so viele Ziegen wie Kühe. Drücken Sie das durch eine Gleichung mit Hilfe von Z und K aus!

Die Aufgabe haben nur ca. 60 % Befragten richtig gelöst. Spätere Untersuchungen, die andere Autoren mit anderen Personengruppen durchgeführt haben, ergaben ein ähnliches Bild. Stets trat dabei am häufigsten der Fehler auf, dass die Gleichung $5\,Z = K$ hingeschrieben wurde. Dieser Fehler hielt sich hartnäckig (in ca. 80 % der Fälle) auch dann, nachdem den Versuchspersonen ausführliche Hilfen und Belehrungen gegeben worden waren.

Offenbar handelt es sich um ein tiefsitzendes Phänomen. Manches deutet auf ein unzulängliches Verständnis des Gebrauchs von Variablen, Termen und Gleichungen hin. So scheint der Buchstabe Z als Abkürzung für den Begriff Ziege und der Term $5\,Z$ als eine Art Ansammlung von 5 Ziegen missverstanden zu werden. An der Entstehung und Festigung solcher Fehlvorstellungen ist nicht selten ein Unterricht beteiligt, in dem formalistische Verfahrensroutinen zu sehr betont und auf Kosten der Entwicklung sinnhafter Assoziationen eingeübt werden.

Beispiele

Dass Grundvorstellungen sich in der Praxis überaus deutlich auswirken können, sollen die folgenden beiden Beispiele illustrieren:

Division durch 1/3

Dividieren ist ursprünglich ein Aufteilen. Sollen 24 Plätzchen unter 6 Personen gerecht aufgeteilt werden, so erhält jede von ihnen 4 (= 24 : 6) Plätzchen. Wie kann man mit dieser Grundvorstellung verstehen, was es heißt, durch den Bruch 1/3 zu dividieren? Die Antwort lautet schlicht: überhaupt nicht. Eine gedrittelte Person oder ähnliches, was sonst noch in dieser Lage herhalten mag, ist doch meist eine arge Zumutung. Ebenso unsinnig wie didaktisch gefährlich wäre die Flucht nach vorn in den Verfahrenskalkül: "Man teilt durch einen Bruch, indem man mit dem Nenner malnimmt usw." – Stattdessen sollte zuallererst eine andere Grundvorstellung entwickelt werden, z.B. die des Passens, des Aufgehens eines Teils in einem Ganzen. In gewissem Sinn kehrt sie die Idee des Aufteilens um. Wie oft kann man 4 Plätzchen in eine Schachtel für 24 hineinlegen? Wie oft passt 1/3 einer Torte in den Platz für eine ganze? Damit verliert die Division durch rationale Zahlen ihr Geheimnis.

Preis ohne Mehrwertsteuer

Eine angemessene Vorstellung von prozentualem Zu- und Abnehmen ist im Alltag unentbehrlich, bei vielen Menschen aber nicht hinreichend ausgebildet. Kostet eine Ware 64 DM zzgl. der gesetzlichen Mehrwertsteuer (16 %, Stand: Mai 2000), so wird vor allem der additive Aspekt verinnerlicht: 64 + 10,24 = 74,24. Damit fällt es z.B. schwer, aus einem Endpreis die Mehrwertsteuer herauszurechnen. Typischer Fehler: Da keine andere Angabe als 74,24 DM vorliegt, werden von ihr die 16 % ermittelt und anschließend abgezogen: 74,24 – 11,88 = 62,36 DM.

Das sich darin ausdrückende Fehlverständnis verursacht noch größere Schwierigkeiten, wenn Zunahme und Abnahme zugleich ins Spiel kommen. Beispiel: Auf einen Listenpreis werden 3 % Rabatt (Skonto bei Sofortzahlung) gewährt, aber auch 16 % Mehrwertsteuer aufgeschlagen. Wer additiv überlegt, fragt sich meist, ob erst der Rabatt und dann die Mehrwertsteuer zu berechnen sei oder umgekehrt.

Solchen Verwirrungen lässt sich vorbeugen, wenn man von vornherein die (hier angemessene) multiplikative Grundvorstellung entwickelt. Es ist also $64 \cdot 1{,}16 = 74{,}24$ zu verinnerlichen. Das Herausrechnen der Mehrwertsteuer läuft dann einfach auf eine Division durch 1,16 hinaus. Ebenso leicht einsehbar wird damit aus einem Listenpreis x der Endpreis $x \cdot 1{,}16 \cdot 0{,}97$, und die Frage nach der Reihenfolge von Abzug und Aufschlag stellt sich gar nicht mehr.

Die Liste derartiger Beispiele ließe sich noch beträchtlich erweitern, etwa um Fragen zu geometrischen Grundvorstellungen: Welchen Vorstellungsinhalt soll man z.B. mit dem Begriff "Gerade" verbinden? Ist es immer sinnvoll, an eine gespannte Schnur zu denken? Oder: sind eine glatte Wasseroberfläche, eine Tafel, ein Blatt Papier wirklich adäquate 'Vorlagen' für den Begriff "Ebene"? – Ist es sinnvoll und angemessen, sich die Deckabbildungen, mit denen die Abbildungsgeometrie umgeht, als (stetige) Bewegungen einer Figur in ihre kongruente Kopie vorzustellen?

Ausführlichere Überlegungen zu diesen Fragen findet man in Bender/Schreiber 1985 und Bender, P.: Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. In: *Zentralblatt f. Didaktik der Mathematik* 14 (1982), 9-24.

Ergänzende Materialien

- Betone die wesentlichen Prinzipien (Whitehead)
- Fundamentale Ideen (Bruner)

Aus: Whitehead 1929/1962 [The Mathematical Curriculum]

Betone die wesentlichen Prinzipien

Die elementare Mathematik [...] muß von allen Bestandteilen gereinigt werden, die nur durch den Hinweis auf den längeren Studiengang im Fach gerechtfertigt werden könnten. Es gibt in einem guten Unterricht nichts Destruktiveres, als stundenlange Anstrengungen auf das Erfassen von Ideen und Methoden zu verschwenden, die zu keinem Ziel führen. [...]

Was ist nun kurzgefaßt das Endresultat unserer Überlegungen? Es besteht darin, daß die Elemente der Mathematik als das Studium einer Menge fundamentaler Ideen behandelt werden sollten, deren Bedeutung die Schüler augenblicklich erkennen können. Jeder Vorschlag und jede Methode, die diesen Test nicht besteht, sollte rücksichtslos gestrichen werden, wie wesentlich sie auch immer für "fortgeschrittenen" Unterricht sein mögen. [...]

Man vereinfache die Einzelheiten und betone die wesentlichen Prinzipien und Anwendungen.

Aus: Bruner 1960/1973 [Der Prozeß der Erziehung], 35-37

Fundamentale Ideen

In den vorausgegangenen Erörterungen sind zumindest vier allgemeine Behauptungen enthalten, die sich für das Lehren der Grundstruktur eines Gegenstandes aufstellen lassen [...].

1. Ein Lehrgegenstand wird faßlicher, wenn man seine Grundlagen versteht. [...]

2. [...] Vielleicht das Grundlegendste, was man nach einem Jahrhundert intensiver Forschung über das menschliche Gedächtnis sagen kann, ist, daß Einzelheiten schnell wieder vergessen werden, wenn sie nicht in eine strukturierte Form gebracht worden sind. [...] Das Erlernen allgemeiner oder grundlegender Prinzipien schützt uns davor, daß ein Erinnerungsverlust keinen völligen Verlust bedeutet [...].

3. Das Verstehen grundlegender Prinzipien und Begriffe scheint [...] der Hauptweg zu einem adäquaten "Übungstransfer" zu sein. [...]

4. Die vierte Behauptung [...] besagt, daß man dadurch, daß man den Unterrichtsstoff [...] ständig auf seinen fundamentalen Charakter hin überprüft, den Abgrund zwischen "fortgeschrittenem" und "elementarem" Wissen verringern kann.