Prof. Dr. Alfred Schreiber – Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Übungen zu "Modellbildung / Simulation"
Blatt 4

Aufgabe 10

a) Studieren Sie sorgfältig die Materialien (pdf) zu B11 und B12. In dem Text "Das allgemeine lineare Modell" werden sieben Fälle diskutiert, die bei einem dynamischen System (DS) mit der Übergangsfunktion $F(x) = a\,x + b$ auftreten können. Vollziehen Sie diese Fälle anhand von simu_b12.html experimentell im Einzelnen nach!

b) Wählen Sie $a = 0{,}7$ und $b = 2$ und starten Sie bei $x_0 = 0{,}1$. Welchem Wert nähert sich die Zustandsgröße x bei wachsender Laufzeit n? Von welcher Periode an weichen zwei benachbarte Zustände um weniger als 0,001 voneinander ab?

c) Ersetzen Sie in b) das additive Glied b durch eine zufällige (und gleichverteilte) reelle Zahl $\in [-2; +2]$. Beobachten Sie das langfristige Systemverhalten und geben Sie eine Erklärung dazu.

Aufgabe 11

Ein DS mit einer Zustandsgröße x verwende in der 1-ten, 3-ten, 5-ten usw. Periode die Übergangsfunktion $F_1(x) = a\,x + b$, hingegen in geraden Perioden die Übergangsfunktion $F_2(x) = c\,x + d$. Wie üblich bezeichne x_n den Zustand nach n Perioden.

a) Zeigen Sie: Bildet man eine neue Periode jeweils aus einer ungeraden und der ihr unmittelbar folgenden geraden Periode, so erscheint das DS als ein System mit der linearen Übergangsfunktion $F(x) := F_2(F_1(x))$. Wie lautet $F(x)$ explizit?

b) Modellieren Sie das beschriebene DS mit den Eingabe-Parametern a, b, c, d sowie Startwert x_0 und frei wählbarer Laufzeit n.

c) Geben Sie geschlossene Ausdrücke für $x_{2\,n}$ und $x_{2\,n+1}$ an.

d) Beobachten Sie das Systemverhalten für $a = 2$, $b = -1$, $c = -\frac{1}{3}$, $d = 5$ und $x_0 = 0$, $n = 30$ und geben Sie eine Erklärung dazu.

Aufgabe 12

Der Floh aus Aufgabe 6 möge nur Sprünge der Länge 1 (in positive und negative Richtung) vollführen können. Simulieren Sie seine "Irrfahrt" auf dem Zahlenstrahl als DS mit der aktuellen Koordinate x (Position des Flohs) als Zustandsgröße.

Schauen Sie sich eine größere Anzahl von Irrfahrten im Zeitdiagramm an!

Lässt sich etwas Auffälliges beobachten?

Zusatzaufgabe

Fjodor sitzt am Roulette-Tisch und setzt 1 Taler auf *Rot* (Wahrscheinlichkeit von $Rot = \frac{18}{37}$). Gewinnt er, so erhält er das Zweifache seines Einsatzes zurück und hat somit 1 Taler Reinerlös; anschließend setzt er wieder 1 Taler auf *Rot*. Im Fall, dass *Rot* nicht erscheint, verliert Fjodor seinen Einsatz, verdoppelt ihn dann aber beim nächsten Spiel. Er kann sich einen fehlenden Betrag borgen, allerdings nicht mehrmals unmittelbar hintereinander. Zu Beginn besitzt Fjodor 1000 Taler. Er spielt solange, wie sein aktuelles Vermögen zu der beschriebenen Spielweise ausreicht und solange die Spielbank geöffnet hat.

Simulieren Sie Fjodors Spielsystem als DS, indem Sie vor jedem Spiel sein Vermögen x_n bestimmen ($n = 0, 1, 2, \ldots, N$). Mit der Höchstzahl N von Spielen legen Sie fest, wann die Spielbank schließt. Natürlich kann es passieren, dass Fjodor schon vorher alles verloren hat.

Visualisieren Sie das Systemverhalten durch Ausgabe des Zeitdiagramms aller Punkte (n, x_n).